

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПСИХОЛОГО-ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
ФАКУЛЬТЕТ «ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ»

МАРКОВСКИЕ МОДЕЛИ В ЗАДАЧАХ ДИАГНОСТИКИ И ПРОГНОЗИРОВАНИЯ

Под редакцией Л.С. Куравского

Издание второе, дополненное

Рекомендовано в качестве учебного пособия для студентов,
обучающихся по направлению подготовки «Прикладная информатика»

**Издательство ФГБОУ ВО МГППУ
Москва
2017**

УДК 519.2+519.6+681.3
ББК 22.161.6+22.18+30.17+32.973+517.8
М-26

Рецензент:

доктор технических наук, профессор,
Заслуженный деятель науки Российской Федерации,
лауреат премии Правительства Российской Федерации
А.И. Галушкин

Авторы:

С.Л. Артеменков, В.И. Алхимов, С.Н. Баранов, Беляева О.Б., П.Н. Думин, П.А. Корниенко,
Л.С. Куравский, С.Б. Малых, А.А. Марголис, П.А. Мармалюк, А.С. Панфилова,
С.И. Попков, Г.А. Юрьев, Н.Е. Юрьева

М-26 Марковские модели в задачах диагностики и прогнозирования: Учеб. пособие. /
Под ред. Л.С. Куравского. – 2-е изд., доп. – М.: Изд-во МГППУ, 2017. – 203 с.: ил. –
ISBN 978–5–94051–168–7.

В учебном пособии рассматривается техника практического применения марковских моделей. Особенностью представленного материала является работа с исследуемым классом моделей в рамках решения, как правило, обратных задач, когда параметры математических моделей идентифицируются по результатам наблюдений. Основы теории марковских процессов представлены только в том объеме, который необходим для описания и решения поставленных математических задач.

Пособие предназначено для научных работников, аспирантов и студентов, изучающих и использующих методы математического и компьютерного моделирования.

Markov models in the diagnostics and prediction problems: Textbook. / Edited by L.S. Kuravsky. – 2nd Edition, Enlarged. – М.: MSUPE Edition, 2017. – 203 pp.: ill. – 978–5–94051–168–7.

Under consideration in this textbook are techniques of Markov model practical applications. The peculiarity of the presented material is that the model class in question is usually used for the purposes of solving the inverse problems, when the parameters of mathematical models are identified according to the observations results. Foundations of the Markov process theory are presented only to the extent that is necessary for describing and solving the mathematical problems posed.

The textbook is destined for researchers, post graduate students and undergraduates who study and use the methods of mathematical and computer modeling.

Табл. 20. Ил. 94.

ISBN 978–5–94051–168–7

УДК 159.9+519.2+519.6+681.3
ББК 22.161.6+22.19+32.973+517.8

Рекомендовано Учебно-методическим объединением по образованию в области прикладной информатики в качестве учебного пособия для студентов высших учебных заведений, обучающихся по направлению подготовки «Прикладная информатика».

Все права защищены. Любая часть этого издания не может быть воспроизведена в какой бы то ни было форме и какими бы то ни было средствами без письменного разрешения владельца авторских прав.

© Авторы, 2013-2017.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие.....	5
Раздел 1. Простейшие марковские модели и примеры их использования для анализа и прогнозирования результатов психологических и технических измерений	11
1.1. Введение	11
1.2. Модели и методы анализа.....	12
1.3. Пример 1. Анализ и прогнозирование динамики средовых влияний в близнецовых исследованиях	17
1.4. Пример 2. Анализ и прогнозирование эволюции психологических характеристик в популяции.....	27
1.5. Пример 3. Исследование поведения технической системы	40
1.6. Заключение.....	53
Литература к разделам 1.1 и 1.2	53
Литература к разделам 1.3 и 1.4	54
Литература к разделу 1.5	57
Раздел 2. Синтез и идентификация скрытых марковских моделей с дискретным и непрерывным временем	58
2.1. Пример технической задачи, решаемой с помощью скрытых марковских моделей.....	58
2.2. Технология решения.....	62
2.3. Пример решения	70
2.4. Заключение.....	82
Литература к разделу 2	83
Раздел 3. Сложные марковские модели и их практическое применение.....	86
3.1. Компьютерное тестирование как пример задачи, требующей применения сложных марковских моделей	86
3.2. Марковские процессы общего вида и их дискретизация	90
3.3. Многофакторные марковские модели и их идентификация	96
3.4. Этапы построения и применения классификатора.....	103
3.5. Пример 1. Применение сложных марковских моделей для решения задачи диагностики.....	106
3.6. Пример 2. Применение сложных марковских моделей для анализа психологических характеристик	119
3.7. Пример 3. Применение сложных марковских моделей для решения технической задачи.....	130
3.8. Заключение.....	139
Литература к разделам 3.1-3.6.....	140
Литература к разделу 3.7	146

Раздел 4. Концепция системы поддержки принятия решений для психологического тестирования, построенная на базе марковских моделей.....	147
4.1. Введение.....	147
4.2. Математические модели для представления динамики прохождения тестов.....	149
4.3. Процедура оценки знаний или способностей.....	153
4.4. Заключение.....	157
Литература к разделу 4.....	157
Раздел 5. Марковские модели в задачах адаптивного тестирования и обучения.....	159
5.1. Технологии компьютерного тестирования.....	159
5.2. Марковские модели адаптивного тестирования и обучения.....	162
5.3. Математическая постановка и решение задачи фильтрации Калмана при адаптивном тестировании с использованием марковских моделей.....	167
5.4. Программная реализация.....	170
5.5. Задача адаптивного обучения.....	1727
5.6. Примеры практического применения.....	176
5.7. Заключение.....	184
Литература к разделу 5.....	184
Раздел 6. Марковские модели управления прикладными многоагентными системами.....	188
6.1. Введение.....	188
6.2. Постановка задачи.....	189
6.3. Модель управления на основе марковского процесса.....	191
6.4. Алгоритм поведения агентов системы.....	194
6.5. Программное обеспечение.....	196
6.6. Прогнозирование состояний системы.....	199
6.7. Заключение.....	201
Литература к разделу 6.....	202

ПРЕДИСЛОВИЕ

В последние годы наблюдается повышенный интерес к марковским моделям, которые успешно применяются в самых различных областях, где решаются задачи диагностики и прогнозирования. Парадигма этих моделей даёт исследователям достаточно широкие возможности для выбора их компонентов и правил организации их работы. Удачный выбор позволяет создавать специализированные сети, приспособленные для решения различных прикладных задач. Разработка подобных конструкций является одним из наиболее перспективных способов решения задач прогнозирования, диагностики и анализа данных.

Это учебное пособие посвящено, в первую очередь, технике практического применения марковских моделей. В рассмотренных примерах один и тот же аппарат используется в двух совершенно различных областях: для исследования состояния технических конструкций и анализа данных в психологии. Особенностью представленного материала является работа с исследуемым классом моделей в рамках решения, как правило, обратных задач, когда параметры математических моделей идентифицируются по результатам наблюдений. Основы теории марковских процессов здесь рассматриваются только в том объёме, который необходим для описания и решения поставленных математических задач. Для специалистов, интересующихся систематическим изложением этой теории, можно рекомендовать ряд книг, вышедших в свет в разные годы:

1. Кельберт М. Я., Сухов Ю. М. Вероятность и статистика в примерах и задачах. Том 2: Марковские цепи как отправная точка теории случайных процессов и их приложения. – М.: МЦНМО, 2010. – 560 с.
2. Саати Т.Л. Элементы теории массового обслуживания и её приложения: Изд. 3-е. – М.: ЛИБРОКОМ, 2010. – 520 с.
3. Овчаров Л. А. Прикладные задачи теории массового обслуживания. – М.: Машиностроение, 1969. – 324 с.

Пособие состоит из шести разделов и приложения.

В *разделе 1* представлены сети Маркова и технология их идентификации, позволяющие исследовать динамику исследуемых характеристик под воздействием различных факторов. Возможности рассмотренного подхода демонстрируются на примерах решения задач анализа и прогнозирования результатов психологических измерений и исследования поведения технической системы.

В *разделе 2* рассматриваются методы синтеза и идентификации скрытых марковских моделей, предназначенных для диагностики систем с дискретным и непрерывным временем. Модель первого приближения

формируется с помощью многомерного статистического анализа наблюдаемых данных или их обработки посредством самоорганизующихся карт Кохонена. Затем эта структура подвергается коррекции по определённым правилам. Для идентификации полученных моделей используются гистограммы наблюдаемых частот пребывания в различных состояниях системы после заданных периодов эксплуатации. Синтез выполняется при наличии неопределённостей, включая отсутствие полной информации о состояниях системы и связях между ними. Связи между различными состояниями определяются в соответствии со смежностью или их кластеров, или приписанных состояниям областей выигрывающих элементов топологических карт Кохонена, опираясь на статистические критерии согласия.

В *разделе 3* рассмотрены сложные марковские модели и примеры их практического применения. Представлен новый подход к построению интеллектуальных и компетентностных тестов, основанный на аппроксимации распределения вероятностей пребывания взора в различных зонах визуального стимула с помощью марковского случайного процесса, заданного уравнением Фоккера-Планка-Колмогорова, и соответствующих этой формализации технологиях диагностики. Наиболее вероятные диагнозы определяются путём оценки степени соответствия траектории взора эталонным вероятностным распределениям, идентифицированным по результатам наблюдений для каждой из диагностируемых групп испытуемых.

В том же разделе представлена концепция обучаемых многофакторных сетей Маркова, позволяющих исследовать эффекты воздействия двух и более факторов различной природы, гибко учитывая особенности поведения наблюдаемых систем и улучшая качество прогнозирования. Предложена техника декомпозиции многофакторных сетей, существенно упрощающая их идентификацию.

В *разделе 3.5* приведён пример практического применения разработанной технологии диагностики для выявления уровня математической подготовки студентов и школьников.

В *разделе 3.6* рассмотрены многофакторные сети Маркова, применяемые для исследования эволюции и взаимодействия психологических характеристик и обученные, используя наблюдаемые распределения индивидуальных характеристик испытуемых в контрольные моменты времени.

В *разделе 3.7* представлены обучаемые многофакторные сети Маркова, позволяющие прогнозировать поведение сложных технических систем. Возможности этих структур продемонстрированы на примерах моделей усталостного разрушения металлических конструкций.

В *разделе 4* представлена концепция системы поддержки принятия решений, предназначенной для оптимизации порядка предъявления заданий психологических тестов и построенной на использовании марковских

моделей с непрерывным временем. Диагностические выводы строятся на основе уточняющихся в процессе тестирования вероятностных оценок принадлежности испытуемых к различным группам. Выбор очередного задания определяется для каждого испытуемого индивидуально, опираясь на результаты выполнения предыдущих и расчёты дифференцирующей способности ещё не предъявленных заданий.

В *разделе 5* представлены технология адаптивного тестирования, основанная на использовании обучаемых структур в форме марковских моделей, и метод фильтрации артефактов, обусловленных различными формами некорректного целенаправленного вмешательства в процедуру испытаний. Особенности представленного подхода являются выявление и использование при построении расчётных оценок временной динамики изменения способности справляться с заданиями теста, а также возможность учёта времени, затрачиваемого на решение тестовых задач. Устранение артефактов выполняется на основе сравнения наблюдаемых и прогнозируемых результатов выполнения заданий с помощью фильтра Калмана, адаптированного для решения рассматриваемой задачи.

В *разделе 6* предложено решение для задачи управления многоагентными системами использующее марковские сети для моделирования поведения сложной системы.

Разумеется, область применения представленных здесь методов не исчерпывается рассмотренными проблемами.

Каждый раздел имеет своё отдельное заключение и список литературы. Задания для практических занятий представлены в отдельном учебном пособии.

Материал данного учебного пособия опирается на следующие работы авторов:

1. Куравский Л.С., Мармалюк П.А., Юрьев Г.А. *Диагностика профессиональных навыков на основе вероятностных распределений глазодвигательной активности.* – Вестник РФФИ, 2016, №3(91), с. 72–82.
2. Куравский Л.С., Попков С.И. *Вероятностная модель поведения прикладной многоагентной системы.* – Нейрокомпьютеры: разработка и применение, 2016, №9, с. 22–34.
3. Куравский Л.С., Мармалюк П.А., Юрьев Г.А., Думин П.Н. *Численные методы идентификации марковских процессов с дискретными состояниями и непрерывным временем.* - Математическое моделирование, 2017, т.29, № 5, с. 133-146.
4. L.S. Kuravsky, S.I. Popkov and S.L. Artemenkov. *An applied multi-agent system within the framework of a player-centered probabilistic computer game.* - International Journal of Modeling, Simulation, and Scientific Computing, Vol. 8, 2017, no. 2, DOI:[10.1142/S1793962317500635](https://doi.org/10.1142/S1793962317500635).
5. Куравский Л.С., Марголис А.А., Мармалюк П.А., Панфилова А.С., Юрьев Г.А. *Математические аспекты концепции адаптивного тренажера.* //

Психологическая наука и образование, №2, 2016, с. 84-95 DOI: [10.17759/pse.2016210210](https://doi.org/10.17759/pse.2016210210).

6. Kuravsky L.S., Margolis A.A., Marmalyuk P.A., Panfilova A.S., Yurev G.A., Dumin P.N. *A probabilistic model of adaptive training* - Applied Mathematical Sciences. 2016. Т. 10. № 48. С. 2369-2380 DOI: [10.12988/ams.2016.65168](https://doi.org/10.12988/ams.2016.65168)
7. Kuravsky L.S., Marmalyuk P.A., Yurev G.A., Belyaeva O.B., Prokopieva O.Yu. *Mathematical foundations of flight crew diagnostics based on videooculography data* -Applied Mathematical Sciences. 2016. Т. 10. № 30. С. 1449-1466. DOI: [10.12988/ams.2016.6122](https://doi.org/10.12988/ams.2016.6122)
8. Куравский Л.С., Мармалюк П.А., Юрьев Г.А., Беляева О.Б., Прокопьева О.Ю. Количественные критерии и концепция диагностики лётного состава по данным видеоокулографии. // Нейрокомпьютеры: разработка, применение. 2015. № 9. С. 24-43.
9. Куравский Л.С., Мармалюк П.А., Юрьев Г.А., Думин П.Н. Идентификация марковских процессов по статистическим данным. // Нейрокомпьютеры: разработка, применение. 2015. № 5. С. 42-47.
10. Kuravsky L. S., Marmalyuk P. A., Yuryev G. A., Dumin P. N. and Panfilova A. S. *Probabilistic Modeling of a Testing Procedure*. - Applied Mathematical Sciences, Vol. 9, 2015, no. 82, 4053 – 4066, <http://dx.doi.org/10.12988/ams.2015.53234>.
11. L. S. Kuravsky, P. A. Marmalyuk, G. A. Yuryev and P. N. Dumin. *A Numerical Technique for the Identification of Discrete-State Continuous-Time Markov Models*. - Applied Mathematical Sciences, Vol. 9, 2015, no. 8, 379 – 391, <http://dx.doi.org/10.12988/ams.2015.410882>.
12. L. S. Kuravsky, P. A. Marmalyuk, S. N. Baranov, V. I. Alkhimov, G. A. Yuryev and S. V. Artyukhina. *A New Technique for Testing Professional Skills and Competencies and Examples of its Practical Applications*. - Applied Mathematical Sciences, Vol. 9, 2015, no. 21, 1003 – 1026, <http://dx.doi.org/10.12988/ams.2015.411899>.
13. Куравский Л.С., Мармалюк П.А., Юрьев Г.А., Думин П.Н. *Методы численной идентификации марковских моделей и их сравнительный анализ*. – Информационные технологии, т. 21, 2015, №10, с. 792– 800.
14. Куравский Л.С., Мармалюк П.А., Баранов С.Н., Алхимов В.И., Юрьев Г.А., Артюхина С.В. *Марковские модели глазодвигательной активности и их применение для тестирования профессиональных навыков*. // Информационные технологии. - М.: Новые технологии. - 01.08.2014. - № 8 С. 34-43
15. Куравский Л.С., Мармалюк П.А., Юрьев Г.А., Баранов С.Н., Полещук Г.Н., Смирнов А.А., Шишов А.Н. *Диагностика лётного состава по результатам работы на авиационных тренажёрах*. // Нейрокомпьютеры: разработка, применение. - М.: Радиотехника. - 01.10.2014. - № 10 С. 14-23.
16. Куравский Л.С., Мармалюк П.А., Алхимов В.И., Юрьев Г.А. *Применение обучаемых структур для анализа результатов компьютерного*

- тестирования. – Нейрокомпьютеры: разработка и применение, №4, 2013, с.18-27.
17. Куравский Л.С., Мармалюк П.А., Барабанщиков В.А., Безруких М.М., Демидов А.А., Иванов В.В., Юрьев Г.А. *Оценка степени сформированности навыков и компетенций на основе вероятностных распределений глазодвигательной активности.* - Вопросы психологии, №5, 2013, с. 64-80.
 18. Куравский Л.С., Марголис А.А., Мармалюк П.А., Юрьев Г.А., Думин П.Н. *Обучаемые марковские модели в задачах оптимизации порядка предъявления психологических тестов.* – Нейрокомпьютеры: разработка и применение, №4, 2013, с.28-38.
 19. Куравский Л.С., Мармалюк П.А., Алхимов В.И., Юрьев Г.А. *Математические основы нового подхода к построению процедур тестирования.* – Экспериментальная психология, т.5, №4, 2012, с. 75-98.
 20. Куравский Л.С., Юрьев Г.А. *Применение фильтра Калмана для фильтрации артефактов при адаптивном тестировании.* - Информационные технологии, №4, 2012, с. 63-69.
 21. Куравский Л.С., Марголис А.А., Юрьев Г.А., Мармалюк П.А. *Концепция системы поддержки принятия решений для психологического тестирования.* - Психологическая наука и образование, №1, 2012, с. 56-65.
 22. Куравский Л.С., Юрьев Г.А. *Об одном подходе к адаптивному тестированию и устранению его артефактов.* - Нейрокомпьютеры: разработка и применение, №1, 2012, с. 54-66.
 23. Куравский Л.С., Юрьев Г.А. *Использование марковских моделей при обработке результатов тестирования.* - Вопросы психологии, №2, 2011, с. 98-107.
 24. Куравский Л.С., Юрьев Г.А. *Адаптивное тестирование как марковский процесс: модели и их идентификация.* – Нейрокомпьютеры: разработка и применение, №2, 2011, с. 21-29.
 25. Куравский Л.С., Баранов С.Н., Юрьев Г.А. *Синтез и идентификация скрытых марковских моделей для диагностики усталостного разрушения.* – Нейрокомпьютеры: разработка и применение, №12, 2010, с. 20-36.
 26. Kuravsky L.S., Baranov S.N. and Yuryev G.A. *Synthesis and identification of hidden Markov models based on a novel statistical technique in condition monitoring.* – In: Proc. 7th International Conference on Condition Monitoring & Machinery Failure Prevention Technologies, Stratford-upon-Avon, England, June 2010. – 23 pp.
 27. Baranov S.N., Kuravsky L.S. *Acoustic vibrations: modeling, optimization and diagnostics.* - 2nd Edition, enlarged. – Moscow: RUSAVIA, 2006. – 224 pp.
 28. Куравский Л.С., Баранов С.Н., Корниенко П.А. *Обучаемые многофакторные сети Маркова и их применение для исследования психологических характеристик.* – Нейрокомпьютеры: разработка и применение, №12, 2005. – с. 65-76.

29. Kuravsky L.S. and Baranov S.N. *The concept of multifactor Markov networks and its application to forecasting and diagnostics of technical systems* – In: Proc. Condition Monitoring 2005, Cambridge, United Kingdom, July 2005, pp. 111-117.
30. Куравский Л. С., Малых С. Б. *Применение марковских моделей для анализа эволюции психологических характеристик в популяции.* – Вопросы психологии, 2003, №4, с. 51-62.
31. Куравский Л.С., Баранов С. Н., Малых С. Б. *Нейронные сети в задачах прогнозирования, диагностики и анализа данных: Учеб. пособие.* – М.: РУСАВИА, 2003. – 100 с.
32. Kuravsky L. S., Baranov S. N. *Condition monitoring of the structures suffered acoustic fatigue failure and forecasting their service life.* – In: Proc. Condition Monitoring 2003, Oxford, United Kingdom, July 2003, pp. 256-279.
33. Kuravsky L. S., Baranov S. N. *Synthesis of Markov networks for forecasting fatigue failures.* – In: Proc. Condition Monitoring 2003, Oxford, United Kingdom, July 2003, pp. 76-91.
34. Куравский Л. С., Баранов С. Н. *Синтез сетей Маркова для прогнозирования усталостного разрушения.* – Нейрокомпьютеры: разработка и применение, 2002, №11, с. 29-40.
35. Куравский Л. С., Баранов С. Н. *Применение нейронных сетей для диагностики и прогнозирования усталостного разрушения тонкостенных конструкций.* – Нейрокомпьютеры: разработка и применение, 2001, №12, с. 47-63.
36. Куравский Л. С., Малых С. Б. *Анализ динамики средовых влияний в близнецовых исследованиях.* – Вопросы психологии, 2001, №6, с. 80-89.
37. Kuravsky L. S., Malykh S. B. *On the application of queuing theory to analysis of twin data.* – Twin Research, Vol. 3, No. 2, 2000, pp. 92-98.

Данное учебное пособие предназначено для научных работников, аспирантов и студентов, изучающих и использующих методы математического и компьютерного моделирования.

РАЗДЕЛ 1. ПРОСТЕЙШИЕ МАРКОВСКИЕ МОДЕЛИ И ПРИМЕРЫ ИХ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ ДЛЯ АНАЛИЗА И ПРОГНОЗИРОВАНИЯ РЕЗУЛЬТАТОВ ПСИХОЛОГИЧЕСКИХ И ТЕХНИЧЕСКИХ ИЗМЕРЕНИЙ

Представлены сети Маркова и технология их идентификации, позволяющие исследовать динамику исследуемых характеристик под воздействием различных факторов. Возможности рассмотренного подхода демонстрируются на примерах решения задач анализа и прогнозирования результатов психологических измерений и исследования поведения технической системы.

1.1. ВВЕДЕНИЕ

Анализ взаимодействия различных наблюдаемых характеристик, а также комбинированного влияния нескольких факторов на эти характеристики часто является объектом различных исследований.

Средства для такого анализа обычно включают различные критерии согласия, дисперсионный факторный анализ, корреляционный и регрессионный анализ, факторный анализ структуры матриц ковариаций и корреляций, и, как один из наиболее современных вариантов последней разновидности анализа, исследование симплекс-моделей [1-4, 10]. Однако, рассматривая такие интегрированные характеристики, как средние, дисперсии и ковариации (первые и вторые моменты исследуемых случайных величин), исследователь теряет достаточно много информации об объекте изучения. Как правило, он также сталкивается с трудностями при экстраполяции (интерполяции) полученных результатов на моменты времени, не совпадающие с теми, в которые проводились наблюдения, а также при выявлении зависимостей эффектов различных воздействий от уровней значений индивидуальных характеристик. Это делает актуальным поиск других подходов, опирающихся на новые принципы анализа.

Представленный далее метод предназначен для исследования эволюции и взаимодействия исследуемых характеристик. Он опирается на результаты, изложенные в работах [7, 8]. В качестве базовых анализируемых характеристик используются гистограммы, представляющие наблюдаемые распределения характеристик объектов исследований в контрольные моменты времени. Однако, в отличие от предыдущих работ, используется существенно более общая и универсальная модель, пригодная не только для исследования комбинированного влияния факторов. Предлагаемый метод позволяет определить, как и по каким причинам в течение выбранного

периода наблюдений изменяются под воздействием систематических факторов совместные распределения исследуемых характеристик.

В разделах 1.3 и 1.4 метод демонстрируется на примере анализа результатов исследований показателей вербального и невербального интеллектов. Проведенный анализ позволил сделать ряд интересных заключений о развитии школьников, воспитываемых в русскоязычных семьях среднего класса, проживающих в московском регионе. В частности, выявлено наличие значимой связи между степенью изменчивости интеллекта и его уровнем, а также явно выраженная тенденция к ослаблению вербального и невербального интеллектов в переходном возрасте; получены выводы, касающиеся результатов обучения одаренных детей по стандартным школьным программам. В разделе 1.3 рассматривается применение марковских моделей в технической задаче диагностики и прогнозирования усталостного разрушения тонкостенных конструкций.

1.2. МОДЕЛИ И МЕТОДЫ АНАЛИЗА

1.2.1. Марковские модели: основные принципы построения

Анализируемой величиной являются диапазоны значений (уровни) исследуемой психологической характеристики. Весь диапазон допустимых значений заданной величины делится на несколько интервалов. Каждый интервал рассматривается как отдельное состояние, в котором исследуемая величина может находиться с некоторой вероятностью, отражающей частоту ее появления в популяции, переходя из одного состояния в другое по определенным правилам. Для описания того, как вероятности нахождения в заданных состояниях изменяются со временем, применяются сети Маркова, рассмотренные в работах [5-6, 13-15]. Математическое описание правил перехода между состояниями характеризует влияние среды (и ее взаимодействия с наследственностью) на эволюцию психологической характеристики.

По результатам накопленных наблюдений проводится прогнозирование указанных вероятностей с использованием параметрических математических моделей, описываемых *марковскими случайными процессами с дискретными состояниями и непрерывным временем*.

Модель для описания динамики этих переходов представляется ориентированным графом, в котором вершины соответствуют состояниям, а дуги соответствуют переходам. Процесс накопления повреждений может рассматриваться как случайное блуждание по графу из одного состояния в другое согласно направлениям дуг. Переходы между состояниями мгновенны и происходят в случайные моменты времени.

Предполагается, что для соответствующих каждой дуге графа переходов между состояниями выполняются следующие два свойства пуассоновских потоков событий (так мы далее будем, согласно принятой терминологии, называть переходы):

- *ординарность* (поток называется ординарным, если вероятность появления двух и более событий в течение малого интервала времени намного меньше, чем вероятность появления за это же время одного события);
- *независимость приращений* (это свойство означает, что количества событий, попадающих в два непересекающихся интервала, не зависят друг от друга).

Можно показать, что в рассматриваемых потоках число событий X , попадающих в любой временной интервал длины τ , начинающийся в момент t , распределено согласно закону Пуассона:

$$P_{t,\tau}(X = m) = \frac{(a(t, \tau))^m}{m!} e^{-a(t, \tau)},$$

где $P_{t,\tau}(X = m)$ - вероятность появления m событий в течение рассматриваемого интервала, $a(t, \tau)$ - среднее число событий, попадающих в интервал длины τ , начинающийся в момент времени t . Далее будут рассматриваться только *стационарные потоки* (в которых $a(t, \tau) = \eta\tau$, $\eta = \text{const}$). Параметр η называется *интенсивностью стационарного потока*. Он равен среднему числу событий в единицу времени. Средняя продолжительность времени между двумя смежными событиями в этом случае равна $1/\eta$.

Упомянутые выше предположения о свойствах потоков событий обычны для прикладных задач, так как эти потоки (или потоки, близкие к ним по свойствам) часто встречаются на практике благодаря предельным теоремам для потоков событий [16].

При указанных предположениях динамика изменения во времени вероятностей пребывания системы в различных состояниях описывается системой обыкновенных дифференциальных уравнений Колмогорова [16], в которой каждому состоянию соответствует уравнение

$$\frac{dp_k(t)}{dt} = -\sum_j \eta_{kj} p_k(t) + \sum_i \eta_{ik} p_i(t),$$

где k - номер состояния; p_k и p_i – вероятности нахождения в k -м и i -м состояниях; η_{kj} - интенсивности потоков, выходящих из состояния k ; η_{ik} -

интенсивности потоков, входящих в состояние k . Для интегрирования указанной системы уравнений необходимо задать начальные условия:

$$p_0(0), p_1(0), \dots, p_n(0); \sum_{k=0}^n p_k(0) = 1. \quad \text{Нормализующее условие} \quad \sum_{k=0}^n p_k(t) = 1$$

выполняется в любой момент времени.

Интенсивности потоков событий являются свободными параметрами модели. Их значения определяются путем сравнения наблюдаемых и прогнозируемых гистограмм, описывающих распределения частот появления неисправностей, а именно: вычисляются значения, обеспечивающие наилучшее соответствие наблюдаемых и ожидаемых частот попадания в определенное состояние системы в заданные моменты времени. Прогнозируемые вероятности нахождения в состояниях получаются путем численного интегрирования систем уравнений Колмогорова.

Прогнозируемая частота попадания в k -е состояние равна $p_k N$, где N – число элементов в выборке. Соответствующие наблюдаемые частоты F_k определяются по доступным выборочным данным.

Статистика Пирсона

$$X^2 = \sum_{k=0}^n \frac{(F_k - p_k N)^2}{p_k N}.$$

используется как мера соответствия в том смысле, что ее большие значения означают плохое согласование прогнозируемых и наблюдаемых результатов, а малые значения – хорошее согласование. Сумма этих статистик минимизируется в те моменты времени, для которых имеются результаты наблюдений.

Данный способ идентификации свободных параметров называется *методом минимума χ^2* [12] и дает решения, близкие к полученным методом максимального правдоподобия [12, с.461-462]. Доказано, что, при выполнении ряда общих условий, значения статистики Пирсона X^2 , получаемые при подстановке истинных решений в случае, если гипотеза об адекватности модели наблюдениям верна, асимптотически описываются распределением χ^2 с $n-l$ степенями свободы, где $n+1$ – число наблюдаемых частот (пронумерованных с нуля), а l – число определяемых параметров, причем вычисленные значения свободных параметров при увеличении объема выборки сходятся по вероятности к искомому решению [12, с. 462-470]. Это позволяет использовать приведенную статистику для проверки гипотезы о том, что полученный прогноз согласуется с результатами наблюдений.

В работах [5, 13-15] представлены два типа марковских моделей: на базе «процессов гибели и размножения» и с произвольной структурой связей. Первый тип использовался для анализа динамики средовых влияний в

близнецовых исследованиях [8], анализа эволюции психологических характеристик в популяции [7] и прогнозирования продолжительности срока службы технических конструкций [5, 13-15], второй - для прогнозирования вероятностей различных типов технических повреждений [5, 13-15]. При использовании моделей второго типа сначала предполагалось, что виды повреждений и структура связей между ними известны заранее, затем была предложена технология синтеза подобных моделей в условиях неопределенности, опирающаяся на методы статистического моделирования [6, 13, 15].

1.2.2. Марковские модели в роли специализированных нейронных сетей

При рассмотренной выше постановке обратной задачи, которая сводится к вычислению параметров дифференциальных уравнений, имеющих решения, наиболее близкие к наблюдаемым, марковские модели фактически выступают в роли одной из разновидностей нейронных сетей. Элементы таких сетей реализуют *состояния* марковских процессов и являются аналогами традиционных *нейронов*. Преобразования в нейронах, обычно задаваемые с помощью *функций активации*, описываются обыкновенными дифференциальными *уравнениями Колмогорова* и определяют динамику изменения вероятностей нахождения в состояниях сети. В качестве *весов* используются интенсивности потоков событий, а входами и выходами сетевых элементов являются *вероятности* пребывания в соответствующих состояниях (более подробно список аналогий представлен в таблице 1.1). Все это дает основания называть подобные модели *сетями Маркова*.

Таблица 1.1. Аналогии между нейронными сетями и марковскими моделями (при постановке обратной задачи).

Нейронная сеть	Марковская модель (процесс с дискретными состояниями и непрерывным временем)
Нейрон	Состояние процесса
Функция активации нейрона	Дифференциальное уравнение, описывающее динамику изменения вероятности нахождения в данном состоянии
Весы соединений	Интенсивности потоков событий
Порог активации	—
Входы и выходы нейронов	Вероятности нахождения в различных состояниях процесса
Свободные параметры есть веса соединений и порог активации	Свободные параметры есть интенсивности потоков событий (коэффициенты дифференциальных уравнений, описывающих эволюцию системы)

Обучающее множество	Наблюдаемая гистограмма частот попадания в различные состояния процесса в заданные моменты времени
При обучении минимизируется ошибка прогноза сети в заданной метрике	При обучении минимизируется статистика, асимптотически описываемая распределением χ^2 и определяющая различия между наблюдаемой и прогнозируемой гистограммами

В специфике применения сетей Маркова и традиционных нейронных сетей имеется ряд различий. В частности, структура традиционных нейронных сетей обычно не фиксируется заранее и гибко подстраивается к заданной постановке задачи, в то время как диаграммы сетей Маркова обычно *a priori* определяются постановкой задачи.

Наряду с указанными позициями сходства можно отметить следующие различия:

- структура нейронных сетей обычно не фиксируется заранее и гибко подстраивается к заданной постановке задачи, в то время как диаграммы марковских процессов обычно *a priori* определяются постановкой задачи;
- нейронные сети прямой передачи обучаются для применения в качестве распознавателя классов, детектора новых явлений или прогнозирования, главная же цель поиска при решении обратной задачи для марковских процессов – это сами коэффициенты, по которым делается прогноз вероятностей.

1.2.3. Идентификация сетей Маркова

Используемая процедура вычисления оцениваемых параметров состоит из двух этапов. На подготовительном этапе с помощью электронной таблицы типа *Microsoft® Excel* для указанной системы дифференциальных уравнений кодируется численная схема интегрирования, позволяющая вычислять вероятностные функции P_k . Эти функции вычисляются с некоторым заданным временным шагом. Для вычисления решения с приемлемой точностью оказались достаточными методы *Рунге-Кутты* (или их эквиваленты).

Например, может быть использована следующая схема интегрирования второго порядка¹ (модифицированный метод Эйлера, адаптированный к рассматриваемым уравнениям):

$$p_k((m+1)h) = p_k(mh) + \frac{1}{2}h\{f_k[p_{k-1}(mh), p_k(mh), p_{k+1}(mh)] + f_k[p_{k-1}(mh) + hp'_{k-1}(mh), p_k(mh) + hp'_k(mh), p_{k+1}(mh) + hp'_{k+1}(mh)]\},$$

¹ Пример кодирования данной схемы интегрирования в электронной таблице *Excel* приведен в работе [15].

где $k=0,1,\dots,n$ (если $k=0$, то в данном выражении опускается p_{k-1} ; если $k=n$, то в выражении опускается p_{k+1}); $m=0,1,\dots,\infty$; штрих обозначает производную по времени $\frac{d}{dt}$; $f_k [\dots]$ есть выражение, определяющее производную $\frac{dp_k(t)}{dt}$ в соответствующем дифференциальном уравнении системы Колмогорова (“правая часть” этого уравнения).

Большое значение имеет то, что электронная таблица *Excel* поддерживает динамические связи между содержимым ячеек. Если поместить свободные параметры и временной шаг в отдельные ячейки, на которые ссылаются как ячейки, содержащие формулы для вычисления первых производных в системе обыкновенных дифференциальных уравнений, так и начальные вероятности нахождения в различных состояниях системы, то все решение будет автоматически модифицироваться по мере изменения значений свободных параметров.

На заключительном этапе запускается численная процедура многомерной нелинейной оптимизации², позволяющая получать искомые значения свободных параметров. Эта процедура может быть оформлена в виде макроса. Полученные оценки свободных параметров рассматриваются как характеристики модели, выявленные в результате наблюдений.

1.3. ПРИМЕР 1. АНАЛИЗ И ПРОГНОЗИРОВАНИЕ ДИНАМИКИ СРЕДОВЫХ ВЛИЯНИЙ В БЛИЗНЕЦОВЫХ ИССЛЕДОВАНИЯХ

1.3.1. Описание задачи

Сети Маркова являются универсальным инструментом для решения многих прикладных задач, часто очень далеких друг от друга. Этот факт хорошо иллюстрируется материалом этой и последующей глав, где аппарат, применявшийся ранее для прогнозирования и диагностики усталостного разрушения, используется для анализа причин изменчивости психологических характеристик.

Для подобных исследований существуют различные методы – от классического *корреляционного анализа* до *конфирматорного факторного анализа*, популярного среди западных исследователей. В последнем случае особенно эффективны методы структурного моделирования, которые

² В настоящее время предлагается достаточно много программных продуктов для решения задач численной оптимизации. В частности, пользователи электронной таблицы *Excel* могут применять программное обеспечение компании *Frontline Systems, Inc.* [17].

являются аналитическими аналогами метода анализа путей, используемого в генетике поведения.

Однако традиционные подходы имеют ряд существенных ограничений, среди которых можно отметить:

- искусственность формальных определений *общей и индивидуальной сред*, воздействующих на испытуемых, что может приводить к посылкам, явно расходящимся с результатами наблюдений (например, к посылке о том, что одно и то же воздействие среды дает одинаковый эффект для испытуемых с различным генотипом);
- неустойчивость результатов моделирования для малых выборок (незначительное изменение объема выборки может приводить к качественному изменению результатов);
- сложность и искусственность интерпретации результатов моделирования в случае малого числа временных интервалов наблюдений.

Учитывая это, сохраняет актуальность задача поиска альтернативных моделей и методов анализа, свободных хотя бы от части указанных недостатков. Один из таких подходов [42, 12], позволяющий исследовать динамику индивидуальных характеристик, и рассматривается в дальнейшем.

Результаты наблюдения за близнецами в последовательные моменты времени дают количественные оценки, с помощью которых определяется, как в течение заданного временного периода *среда* изменяет начальные индивидуальные различия, обусловленные *наследственностью*. В следующем разделе обсуждаются параметры, описывающие эффекты воздействия генетического фактора и среды. В отличие от конфирматорного факторного анализа [35, 44], вместо ковариационных матриц в качестве базовых анализируемых характеристик используются гистограммы.

1.3.2. Определения и модели

Анализируемой величиной является абсолютное значение разности исследуемых характеристик для членов одной и той же близнецовой пары. Допустимый диапазон значений этой величины делится на несколько интервалов. Каждый интервал рассматривается как отдельное состояние, в котором пара близнецов может находиться с некоторой вероятностью.

Для описания того, как вероятности нахождения в заданных состояниях изменяются со временем, применяются сети Маркова, рассмотренные в разделе 1.2. Математическое описание правил перехода между состояниями характеризует влияние среды на близнецов. Важно отметить, что в данной модели учитывается только то влияние среды, которое различается для близнецов (так называемая *индивидуальная среда*).

В свою очередь, начальное распределение вероятностей состояний в момент рождения отражает генетические различия между близнецами. Параметры этого распределения описывают влияние генетического фактора. В результате воздействия среды начальное распределение вероятностей в

течение времени наблюдений трансформируется в некоторое текущее распределение. Предполагается, что для переходов между состояниями выполняются свойства пуассоновских потоков событий (см. раздел 1.2.1).

Система, показанная на рис. 1.1, используется для исследования процесса развития близнецов³. Она представляет собой конечную цепь из $n+1$ состояния, в которой переходы из состояния x_k ($k \neq 0, k \neq n$) возможны только в предшествующее состояние x_{k-1} или в следующее по порядку состояние x_{k+1} . Из состояний x_0 и x_n доступны только состояния x_1 и x_{n-1} , соответственно.

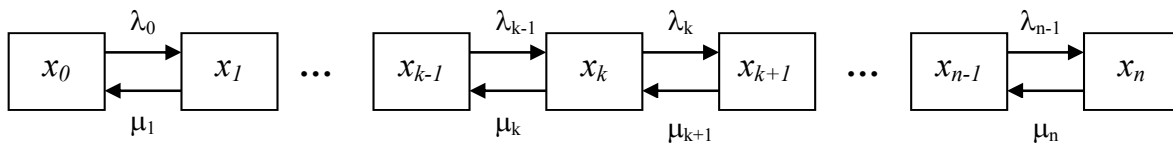


Рис. 1.1. Сеть, используемая для анализа динамики развития близнецов: x_i ($i=0,1,\dots,n$) – состояния, λ_i ($i=0,1,\dots,n-1$) и μ_i ($i=1,2,\dots,n$) – интенсивности переходов.

Интенсивности потоков обозначены как λ_k и μ_k . Параметры λ_k показывают, как среда делает близнецов различными (дивергенция). Параметры μ_k показывают, как среда сближает близнецов (конвергенция).

Если обозначить полный диапазон допустимых значений разностей между исследуемыми характеристиками близнецов как D , то состоянию x_0 будет соответствовать интервал разностей от 0 до $\frac{D}{n+1}$, состоянию x_1 – интервал от $\frac{D}{n+1}$ до $\frac{2D}{n+1}$, и так далее. Динамика изменения во времени вероятностей нахождения в различных состояниях описывается следующей системой обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\frac{dp_0(t)}{dt} = -\lambda_0 p_0(t) + \mu_1 p_1(t);$$

.....

$$\frac{dp_k(t)}{dt} = -(\lambda_k + \mu_k) p_k(t) + \lambda_{k-1} p_{k-1}(t) + \mu_{k+1} p_{k+1}(t)$$

$$(k = 1, 2, \dots, n-1);$$

.....

$$\frac{dp_n(t)}{dt} = -\mu_n p_n(t) + \lambda_{n-1} p_{n-1}(t),$$

³ Аналогичная система рассматривалась в главе 1.

где $p_k(t)$ есть вероятность нахождения в состоянии x_k в момент времени t . Чтобы упростить задачу, интенсивности потоков далее полагаются не зависящими от индекса k : $\lambda_0 = \lambda_1 = \dots = \lambda_{n-1} = \lambda$ и $\mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_n = \mu$.

При использовании приведенной выше модели для анализа близнецовых данных, момент времени $t = 0$ рассматривается как момент рождения близнецов. Полагается, что для *монозиготных* (МЗ-) близнецов $p_0(0) = 1$ и $p_k(0) = 0$ ($k = 1, \dots, n$), так как между ними нет генетических различий, а воздействие среды в начальный момент времени еще не сказывается. Для *дизиготных* (ДЗ-) близнецов и неродственных пар полагается, что разности параметров в начальный момент времени описываются нормальным распределением с нулевым средним и некоторыми среднеквадратическими отклонениями σ_{dz} и σ_{un} , которые характеризуют влияние генетического фактора. Следующие равенства выполняются из-за симметрии распределения:

$$p_0(0) = \frac{2}{\sqrt{2\pi\sigma}} \int_0^{D/(n+1)} e^{-x^2/2\sigma^2} dx, p_1(0) = \frac{2}{\sqrt{2\pi\sigma}} \int_{D/(n+1)}^{2D/(n+1)} e^{-x^2/2\sigma^2} dx, \dots,$$

и так далее ($\sigma = \sigma_{dz}$ для дизиготных близнецов и $\sigma = \sigma_{un}$ для неродственных пар).

В указанных выше терминах определение влияния наследственности и среды сводится к вычислению среднеквадратических отклонений σ_{dz} и σ_{un} и интенсивностей λ и μ . В качестве оценок этих независимых параметров принимаются значения, обеспечивающие наилучшее соответствие между наблюдаемыми и прогнозируемыми частотами попадания в каждое из состояний в заданные моменты времени.

Одни и те же независимые параметры подбираются к нескольким группам пар, а именно: к монозиготным близнецам, к дизиготным близнецам и к неродственным парам.

Прогнозируемые вероятности пребывания в состояниях вычисляются путем интегрирования указанной системы дифференциальных уравнений. Как и ранее, *статистика Пирсона* используется в качестве минимизируемой меры соответствия прогнозируемых и наблюдаемых значений. Наблюдаемые количества попаданий в различные интервалы разностей определяются в результате измерений, сделанных в процессе лонгитюдных исследований.

Процедура вычисления значений свободных параметров рассмотрена в разделе 1.2. Вычисленные значения рассматриваются как характеристики влияния наследственности и среды, выявленные в результате наблюдений.

1.3.3. Результаты анализа

Предлагаемый подход применялся для анализа лонгитюдных данных моно- и дизиготных близнецов. Далее он иллюстрируется на примере исследований *общего коэффициента интеллектуального развития (General IQ - GIQ)* из Московского близнецового лонгитюда⁴. Были использованы три группы пар разного возраста: монозиготные близнецы (6 лет - 47 пар; 14 лет - 37 пар), дизиготные близнецы (6 лет - 47 пар; 14 лет - 33 пары) и неродственные пары (6 лет - 41 пара; 14 лет - 45 пар). Сумма мер соответствия во временных точках 6 и 14 лет минимизировалась посредством выбора следующих свободных параметров:

- интенсивностей потоков λ_{0-6} и μ_{0-6} , которые полагались одними и теми же в диапазоне 0-6 лет,
- интенсивностей потоков λ_{6-14} и μ_{6-14} , которые полагались одними и теми же в диапазоне 6-14 лет,
- среднеквадратических отклонений σ_{dz} и σ_{un} , характеризующих начальные распределения *GIQ* в нулевой момент времени.

Время измерялось в годах. Сеть представляла собой цепь из 12-ти состояний, как показано на рис. 1.1. Допустимый интервал разностей *GIQ* внутри пар (от 0 до 60 единиц) был разделен на 12 равных частей.

Подбор параметров сети характеризуется статистиками, представленными в табл. 1.2. Полученные результаты говорят об очень хорошем соответствии.

Таблица 1.2. Результаты подбора параметров по наблюдаемым распределениям *GIQ*.

Возраст	К-во ст. св.	χ^2	р-значение
6 лет	29	19.36	0.91
14 лет	31	25.09	0.76
Всего	60	44.44	0.93

Табл. 1.3 показывает вычисленные оценки искомых параметров. Распределения прогнозируемых вероятностей нахождения в том или ином состоянии в начальный момент времени (для дизиготных близнецов и неродственных пар) приведены на рис. 1.2. Наблюдаемые и прогнозируемые вероятности пребывания в состояниях для 6- и 14-летних пар представлены на рис. 1.3. В качестве иллюстрации, оценки функций $p_k(t)$ для монозиготных близнецов в интервале от 0 до 6 лет показаны на рис. 1.4.

⁴ Данные Московского близнецового лонгитюда получены при поддержке грантов International Science Foundation (№ ZZ 5000/426 , № KWD100 - рук. С.Б. Малых), РГНФ (№ 96-03-042446, № 98-06-08084 – рук. С.Б. Малых).

Таблица 1.3. Оценки независимых параметров сети.

	Параметр	Значение
Влияние наследственности	Начальное среднеквадратическое отклонение для ДЗ-близнецов	7.90
	Начальное среднеквадратическое отклонение для неродственных пар	18.56
Влияние среды	Интенсивность дивергенции (0-6 лет)	0.128
	Интенсивность конвергенции (0-6 лет)	0.206
	Интенсивность дивергенции (6-14 лет)	0.194
	Интенсивность конвергенции (6-14 лет)	0.176

Чтобы выяснить, как среднеквадратические отклонения разностей GIQ изменяются во временной области, определялись нормальные распределения с нулевым средним, наиболее близкие к распределениям прогнозируемых вероятностей в смысле критерия согласия χ^2 . Сравнения оценок для 6- и 14-летнего возраста представлены в табл. 1.4.

Таблица 1.4. Среднеквадратические отклонения нормально распределенных разностей GIQ в различные моменты времени.

Тип пар	Возраст, лет	С.к.о., единиц GIQ
МЗ-близнецы	0	0
	6	6.39
	14	10.97
ДЗ-близнецы	0	7.90
	6	9.09
	14	12.93
Неродственные пары	0	18.56
	6	18.04
	14	20.47

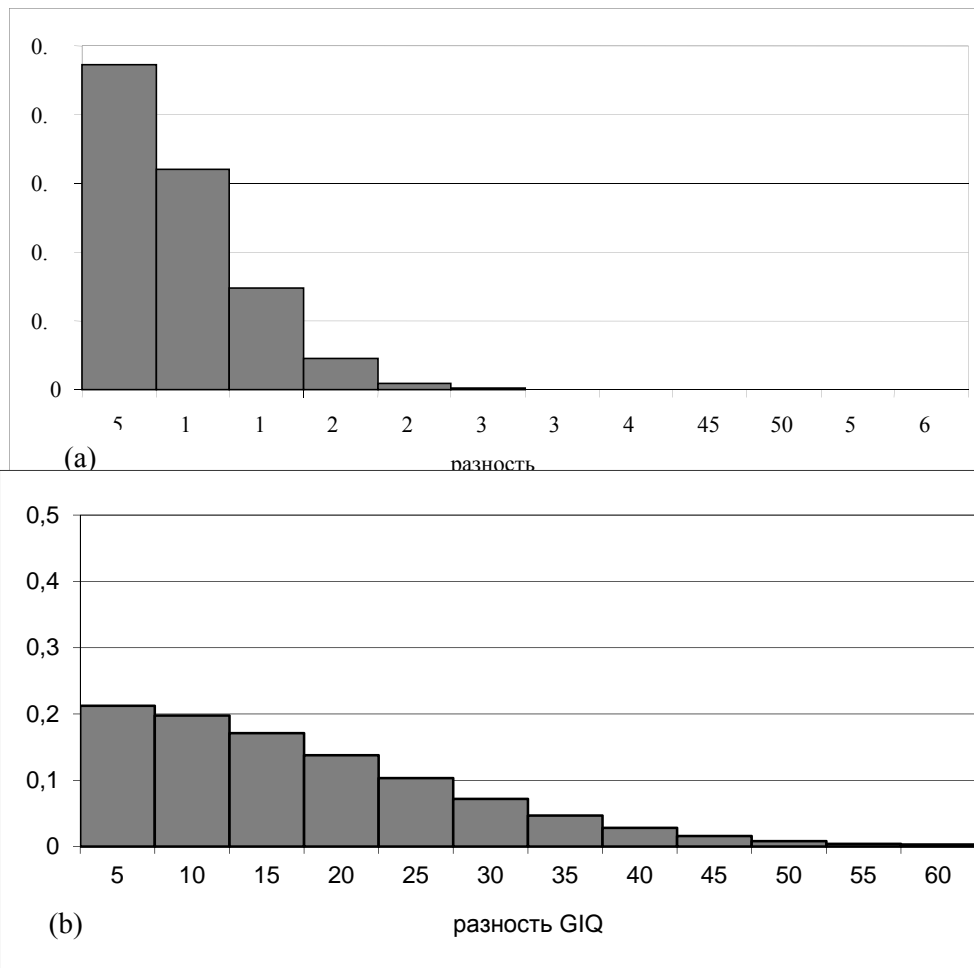


Рис. 1.2. Распределения прогнозируемых вероятностей пребывания в состояниях в начальный момент времени: (a) *ДЗ*-близнецы, (b) неродственные пары.

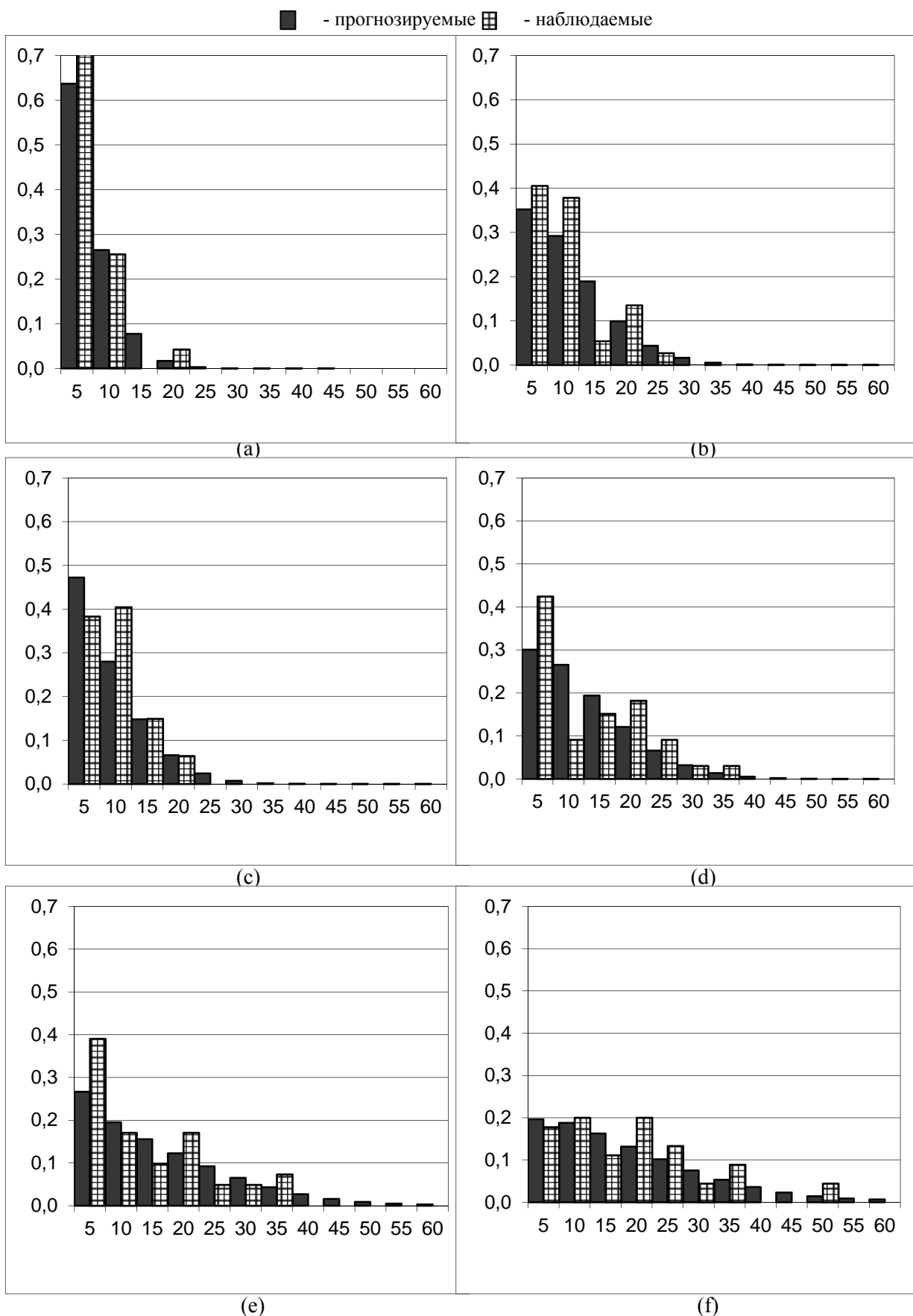


Рис. 1.3. Прогнозируемые и наблюдаемые вероятности состояния как функции разности значений GIQ в паре: (a) $M3$ -близнецы – 6 лет, (b) $M3$ -близнецы – 14 лет, (c) $D3$ -близнецы – 6 лет, (d) $D3$ -близнецы – 14 лет, (e) неродственные пары – 6 лет, (f) неродственные пары – 14 лет.

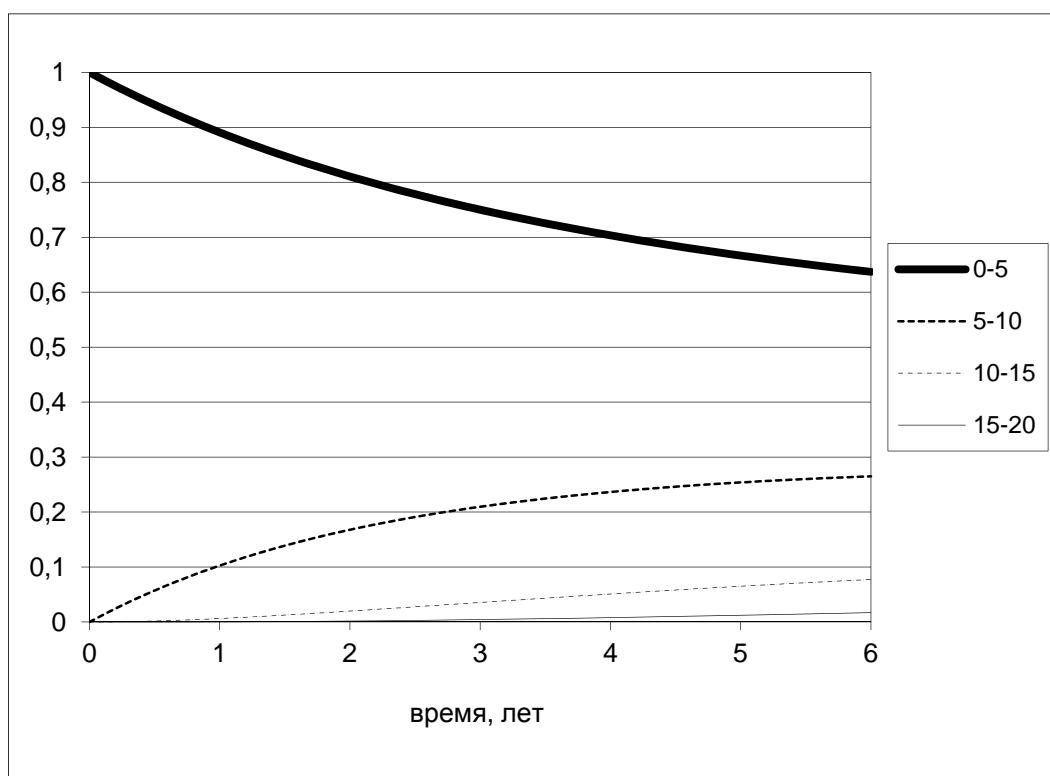


Рис. 1.4. Функции $p_k(t)$ для MZ-близнецов от 0 до 6 лет (интервалы состояний показаны в единицах GIQ).

1.3.4. Обсуждение результатов

Полученные результаты (см. табл. 1.4) показывают явную зависимость начальных распределений разностей GIQ от степени родства: чем больше степень родства, тем меньше соответствующее среднее квадратическое отклонение ($\sigma_{un} > \sigma_{dz} > \sigma_{mz} = 0$). Этот факт не противоречит обычным представлениям о влиянии наследственности.

Начальное среднее квадратическое отклонение для дизиготных близнецов составляет 43% этой величины для неродственных пар (в других исследованиях его значение находилось в диапазоне 40-60%). В дальнейших исследованиях представляет интерес выявление связи этого параметра и коэффициента корреляции близнецовой пары.

Как правило, воздействие среды приводит к “размыванию” начальных распределений: чем больше прошедший промежуток времени, тем больше текущее среднее квадратическое отклонение. Единственное исключение в случае 6-летних неродственных пар может быть объяснено статистическими ошибками, обусловленными ограниченностью выборки.

Оценки интенсивностей потоков событий (см. табл. 1.2) показывают, что до школы (до 6-летнего возраста) среда более способствует конвергенции GIQ , чем дивергенции. В школе (после 6-летнего возраста) ситуация меняется на прямо противоположную. Можно также отметить, что после поступления в школу интенсивность дивергенции возрастает, в то время как интенсивность конвергенции убывает.

Чтобы выяснить, как могут изменяться оцениваемые независимые параметры при изменении длин интервалов состояний, по результатам расширенной выборки⁵ (119 монозиготных пар, 90 дизиготных пар) были выполнены две соответствующие оценки для 14-летних близнецов. Их результаты, относящиеся к 5- и 10-единичным интервалам, показаны в табл. 1.5. Можно видеть, что различие в начальных среднеквадратических отклонениях не превышает 6-15%. Учитывая длину интервалов состояний, такое согласование результатов может быть признано хорошим. Сравнение интенсивностей переходов явно указывает на то, что зависимость между ними и длинами интервалов носит нелинейный характер.

Таблица 1.5. Сравнение оценок независимых параметров для сетей с интервалами состояний длиной в 5 и 10 единиц (14-летние пары).

<i>Параметр</i>	Состояние с интервалом в 5 единиц (сеть 1)	Состояние с интервалом в 10 единиц (сеть 2)	Процентное соотношение
Начальное с.к.о. для ДЗ-близнецов	10.85	12.71	85%
Начальное с.к.о. для неродственных пар	21.28	22.57	94%
Конечное с.к.о. для МЗ-близнецов	9.70	9.86	98%
Конечное с.к.о. для ДЗ-близнецов	13.82	15.09	92%
Конечное с.к.о. для неродственных пар	22.89	22.94	99.8%
Интенсивность дивергенции	0.027	0.151	18%
Интенсивность конвергенции	0.029	0.185	15%

Табл. 1.6 показывает, какую часть начальная дисперсия составляет в конечной дисперсии для различных типов пар. Полученные данные позволяют сделать важный вывод: одно и то же воздействие среды (представленное интенсивностями потоков событий) может давать различные вклады в конечные дисперсии. Величины этих вкладов зависят от генетического фактора, представленного распределениями анализируемой характеристики в момент рождения.

⁵ В нее вошли близнецы, впервые включенные в экспериментальную выборку в 14 лет.

Таблица 1.6. Начальная дисперсия для различных типов пар, в % от конечной дисперсии.

Тип пар	Начальная дисперсия в % от конечной
МЗ-близнецы	0%
ДЗ-близнецы	37%
Неродственные пары	82%

В целом полученные результаты свидетельствуют о перспективности предложенного метода анализа динамики средовых влияний на психологические характеристики в ходе онтогенеза. Действительно, такие характеристики, как интенсивности потоков событий, существенно отличаются от величин, используемых при традиционном конфирматорном факторном анализе, и не могут быть вычислены с его помощью. Поэтому предлагаемый подход позволяет глубже исследовать проблему.

1.4. ПРИМЕР 2. АНАЛИЗ И ПРОГНОЗИРОВАНИЕ ЭВОЛЮЦИИ ПСИХОЛОГИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК В ПОПУЛЯЦИИ

1.4.1. Описание задачи

Комбинированное влияние средовых и наследственных факторов есть следствие совместного проживания самостоятельных индивидуумов в одной популяции, приводящего к наличию общих генов и условий существования. Это влияние, обусловленное ассортативным подбором, корреляцией генотипа и среды, взаимодействием генотипа и среды, а также другими причинами, рассматривается как результат воздействия некоторого *систематического фактора*. Лонгитюдный анализ подобных влияний часто является объектом психологических исследований.

Средства для лонгитюдного анализа обычно включают различные критерии согласия, дисперсионный факторный анализ, анализ ковариационных и корреляционных структур, и, как один из наиболее современных вариантов последней разновидности анализа, исследование *симплекс-моделей* [32, 24, 27]. Однако, рассматривая такие интегрированные характеристики, как дисперсии, ковариации и средние, исследователь теряет достаточно много информации об объекте изучения. Как правило, он также сталкивается с трудностями при экстраполяции (интерполяции) полученных результатов на моменты времени, не совпадающие с теми, в которые проводились наблюдения, а также при выявлении зависимостей эффектов различных воздействий от уровней значений индивидуальных характеристик.

Это делает актуальным поиск других подходов, опирающихся на новые принципы.

Представленный далее метод предназначен для исследования эволюции распределений фенотипа с возрастом. Он опирается на результаты, изложенные в статьях [42, 12], посвященных оценке влияния генетического фактора и индивидуальной среды на близнецовые пары. Как и ранее, в качестве базовых анализируемых характеристик используются гистограммы. Однако теперь они описывают не различия в близнецовых парах, а распределения индивидуальных характеристик испытуемых, не связанных родством. Используя измерения в контрольных точках, предлагаемый метод позволяет определить, как систематический фактор влияет на распределение значений фенотипа в течение выбранного периода наблюдений.

Метод демонстрируется на примере анализа результатов лонгитюдных исследований *общего коэффициента интеллектуального развития (GIQ)*. Главная цель – оценка комбинированных воздействий среды и наследственности на характеристики популяции в зависимости от возраста и уровня *GIQ*. Проведенный анализ позволяет сделать ряд интересных заключений о развитии российских детей до школы и в период первого этапа школьного обучения. В частности, показано, что обучение по стандартным программам в большей степени способствует развитию «слабых», а не одаренных детей.

В заключение рассматривается так называемая *двумерная модель*, позволяющая сравнивать эффекты комбинированных воздействий наследственности и среды, влияющих на характеристики популяции, с воздействием индивидуальной среды, оцениваемым по данным близнецовых исследований. Результаты применения представленного подхода сравниваются с данными анализа, проведенного с помощью классической *симплекс-модели*.

1.4.2. Метод исследования

Распределение индивидуальных характеристик в момент рождения описывает в представленной модели совместное влияние наследственности и фактора среды в перинатальном периоде развития. В результате последующих воздействий систематического фактора, начальные распределения в течение времени наблюдений постепенно изменяют свою форму. Эта идеализация опирается на результаты близнецовых исследований *IQ*, которые показали наличие активных и изменяющихся средовых и генетических влияний на индивидуальные различия в период развития личности [28, 14]. Поскольку анализируемые далее выборки не информативны с точки зрения генетики, эффекты воздействия указанных факторов не разделяются.

Для проводимого анализа необходимо, чтобы представляющие интерес параметры измерялись в шкале, не зависящей от времени (то есть методика тестирования должна учитывать возрастную эволюцию, как это имеет место для IQ).

С каждой изменяющейся со временем гистограммой связывается марковский процесс с дискретными состояниями и непрерывным временем, имеющий кусочно-постоянные интенсивности переходов между состояниями. Как и ранее, диапазон допустимых значений исследуемой величины делится на несколько интервалов; каждый интервал рассматривается как отдельное состояние, в котором значение исследуемой характеристики может находиться с некоторой вероятностью. Число состояний определяется желаемой точностью оценок и доступным объемом выборки⁶. Переходы между состояниями, описывающие эволюцию исследуемого признака, являются результатом воздействия систематического фактора. Его математическое описание характеризует влияние этого фактора на популяцию.

Сеть, используемая для анализа, показана на рис. 1.5. Интенсивности переходов обозначены как λ_p и μ_q ($p = 0, 1, \dots, n-1$ и $q = 1, 2, \dots, n$). Параметры λ_p описывают, как воздействие систематического фактора способствует увеличению исследуемых значений фенотипа. Параметры μ_q описывают обратный эффект этого фактора – уменьшение значений фенотипа.

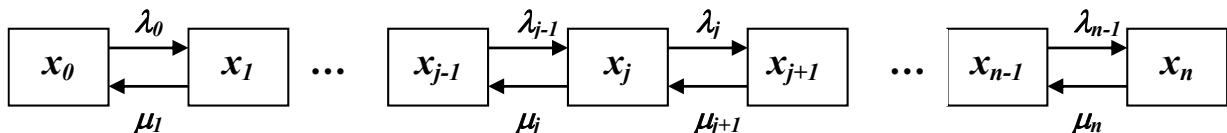


Рис. 1.5. Сеть, использованная для анализа эволюции распределений фенотипа с возрастом: x_j ($j = 0, 1, \dots, n$) - состояния, λ_p ($p = 0, 1, \dots, n - 1$) и μ_q ($q = 1, 2, \dots, n$) – интенсивности переходов.

Если обозначить верхнюю и нижнюю границы диапазона возможных значений фенотипа как D_{bot} и D_{top} , состояние x_0 будет соответствовать интервалу от D_{bot} до $D_{bot} + \frac{D_{top} - D_{bot}}{n + 1}$, состояние x_1 - интервалу от

⁶ Рассматривая непрерывно изменяющуюся характеристику как дискретную величину, мы теряем часть информации (это имеет место при любой идеализации). Однако эти потери несущественны в случае достаточно больших выборок, когда мы имеем возможность устанавливать длину интервалов состояний так, чтобы она не превышала ошибок измерений.

$D_{bot} + \frac{D_{top} - D_{bot}}{n + 1}$ до $D_{bot} + 2\frac{D_{top} - D_{bot}}{n + 1}$, и так далее. Система дифференциальных

уравнений, описывающая динамику изменения вероятностей пребывания в различных состояниях, приведена в разделе 1.3.2.

Поскольку величины, формируемые в результате воздействия большого числа независимых элементарных факторов, ни один из которых не доминирует, могут рассматриваться как асимптотически нормальные, то распределения значений исследуемых характеристик, для которых выполняются подобные предположения⁷, в момент рождения и в другие контрольные моменты времени приблизительно нормальны. Среднее m_0 и среднеквадратическое отклонение σ_0 в точке $t = 0$ характеризуют начальное распределение.

Таким образом, оценка систематических воздействий сводится к вычислению среднего m_0 , среднеквадратического отклонения σ_0 и интенсивностей переходов λ_p и μ_q . В качестве оценок этих свободных параметров используются значения, обеспечивающие наилучшее соответствие наблюдаемых и прогнозируемых частот попадания в состояния модели в заданные моменты времени. Эти оценки рассматриваются как характеристики систематических воздействий, проявившиеся в период наблюдений. Нормальность распределений фенотипа в контрольные моменты времени (как это имеет место для *IQ*) фактически выступает в роли дополнительного ограничения при определении значений интенсивностей переходов.

Чтобы в случае нормально распределенных фенотипов избежать подгонки модели к возмущениям, обусловленным ошибками выборки, свободные параметры модели следует определять как функции средних значений и среднеквадратических отклонений соответствующих нормальных распределений. Выполняемое сглаживание наблюдаемых гистограмм снижает зависимость конечных результатов от ошибок выборки.

В качестве оценок свободных параметров берутся значения, минимизирующие сумму рассмотренных выше *статистик Пирсона* в те моменты времени, для которых имеются результаты наблюдений. При этом наблюдаемые количества попаданий в состояния модели в выражениях статистики Пирсона заменяются соответствующими значениями, вычисленными для случая нормально распределенных фенотипов. Параметры нормальных распределений подбираются так, чтобы обеспечить наилучшее согласование с наблюдениями.

Подобные подстановки лишают нас возможности непосредственно использовать критерий согласия χ^2 для оценки адекватности модели. Однако, рассматривая сумму построенных выше мер соответствия как обычный

⁷ Например, таких, как *IQ*.

критерий минимизации, можно, после нахождения оптимальных значений параметров⁸, применить данный критерий для оценки степени согласования модели с исходными наблюдаемыми данными.

Процедура вычисления значений свободных параметров рассмотрена в разделе 1.2. В дополнение к изложенному выполняется этап, на котором оцениваются параметры нормальных распределений, наилучшим образом согласующихся с наблюдаемыми количествами попаданий в состояния. Наблюдаемые количества попаданий в выражении для меры соответствия в дальнейшем заменяются числами попаданий, определяемыми полученными нормальными распределениями. Параметры наиболее согласованных распределений могут быть вычислены либо в виде выборочных точечных оценок, либо непосредственно методом минимума χ^2 .

1.4.3. Результаты анализа

В последующих разделах рассматривается применение сетей Маркова для анализа результатов лонгитюдных исследований *GIQ*. Выборка включала 94 6-летних и 70 14-летних детей. Все дети посещали обычные российские школы. Измерения общего *GIQ* выполнялись дважды: в возрасте 6 и 14 лет. Исследовался диапазон от 60 до 160. Оптимизируемая сеть представляла собой цепь из 20-ти состояний. Прогнозируемые частоты попаданий в эти состояния подгонялись к наблюдаемым частотам во временных точках, соответствующих 6- и 14-летнему возрасту.

Критерий согласия χ^2 показал отсутствие значимых различий между наблюдаемыми частотами попадания в указанные состояния и соответствующими прогнозируемыми частотами нормальных распределений ($p = 0,83$ для выборки 6-летних и $p = 0,88$ для 14-летних). Следовательно, нет оснований отвергать гипотезу о нормальности данных.

F-тест показал отсутствие значимых различий и между дисперсиями для контрольных возрастов ($p = 0,12$). Это позволяет принять гипотезу об однородности дисперсий и использовать в последующих вычислениях общую оценку дисперсии по всей выборке. В свою очередь, критерий *Стьюдента* показывает высоко значимые отличия в средних значениях *GIQ* для контрольных возрастов ($p < 0,00001$).

Сумма мер соответствия для 6 и 14 лет минимизировалась путем выбора следующих свободных параметров:

- интенсивностей переходов λ_p и μ_q для диапазона 0-6 лет;
- интенсивностей переходов λ_p и μ_q для диапазона 6-14 лет;
- среднего m_0 и среднеквадратического отклонения σ_0 .

⁸ Фактически мы применяем метод наименьших квадратов вместо метода минимума χ^2 . Выражение статистики Пирсона формально используется как нормализованный критерий метода наименьших квадратов.

Чтобы разумно сочетать сложность модели и степень подробности исследования, необходимо использовать наименьшее число свободных параметров, обеспечивающее приемлемое согласование прогноза и наблюдения. Для определения этого числа сравнивались три модели различной сложности. В первой модели интенсивности переходов полагались равными для диапазонов 60-85, 85-110, 110-135, 135-160 единиц GIQ : $\lambda_0 = \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3, \dots, \lambda_{16} = \lambda_{17} = \lambda_{18} = \lambda_{19}; \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4, \dots, \mu_{17} = \mu_{18} = \mu_{19} = \mu_{20}$. (Естественно предполагать, что интенсивности переходов не изменяются слишком быстро с ростом GIQ .) Во второй модели диапазоны GIQ шире: 60-110 и 110-160. В третьей модели интенсивности переходов не зависят от значений GIQ . Оценки согласования идентифицированных моделей с результатами наблюдений представлены в табл. 1.7.

Таблица 1.7. Идентификация моделей различной сложности.

№ модели	Мера соответствия (с частотами идентифицированного нормального распределения)	Мера соответствия χ^2 (с исходными результатами наблюдений)	Степени свободы	p- значение
1	0,43	19,07	8	0,01
2	0,79	18,75	16	0,28
3	1,75	18,37	20	0,56

Следует выбрать наилучшую в смысле принятой меры соответствия модель, обеспечивающую приемлемое согласование с исходными результатами наблюдений. Поскольку первая модель не согласуется с наблюдениями ($p=0,01$), для последующего анализа была выбрана вторая модель ($p=0,28$). Третья модель была отвергнута как имеющая наихудшее значение меры соответствия.

Таблица 1.8. Модель 2: параметры прогнозируемых нормальных распределений.

Возраст	Среднее нормального распределения	Среднеквадратическое отклонение нормального распределения
0 лет	99,18	11,81
6 лет	98,24	12,63
14 лет	109,03	12,63

В табл. 1.8 и на рис. 1.6 представлены полученные оценки интенсивностей переходов и начальных значений среднего GIQ и среднеквадратического отклонения. Наблюдаемые и прогнозируемые вероятности нахождения в различных состояниях сети для контрольных

возрастов ($t = 6, 14$) представлены на рис. 1.7. На рис. 1.8 показаны огибающие распределений прогнозируемых вероятностей в момент рождения и в контрольные моменты времени. Коэффициенты интеллектуального развития новорожденных рассматриваются как экстраполируемые характеристики, определяющие способности в будущем. Они допускают только косвенные оценки.

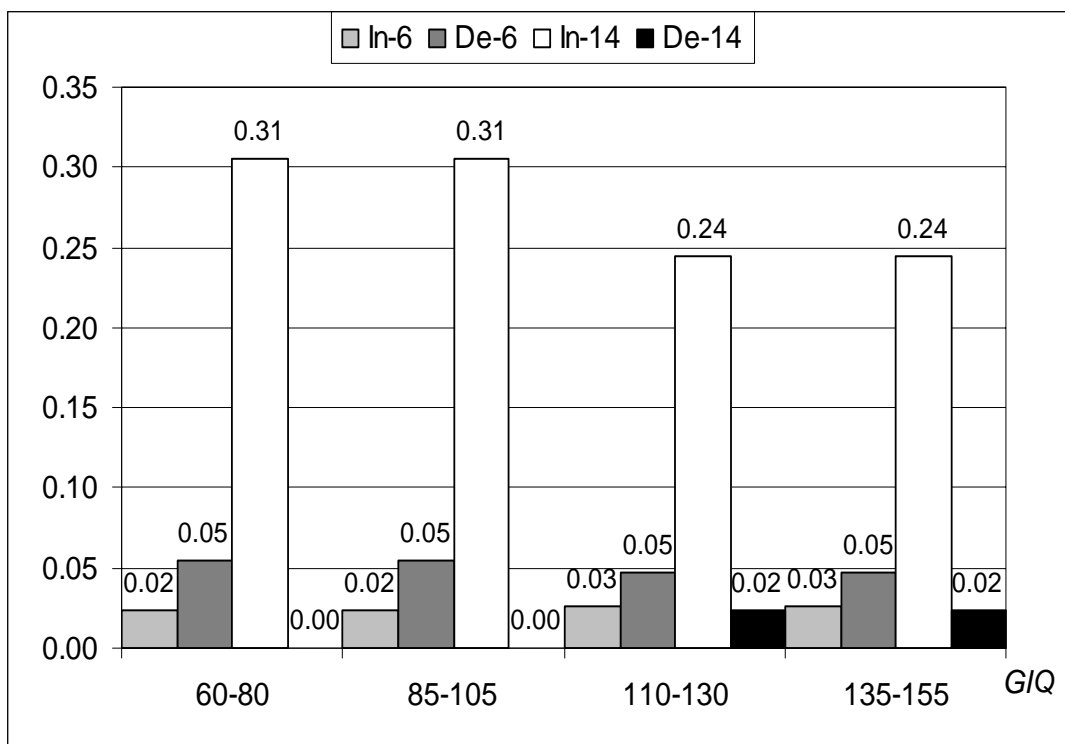


Рис. 1.6. Оценки интенсивностей переходов (*In* – увеличение; *De* – уменьшение).

Корректное применение модели требует исследования чувствительности полученных результатов к изменчивости наблюдаемых характеристик. В нашем случае все свободные параметры определяются тремя независимыми статистиками⁹: выборочными средними значениями для двух контрольных возрастов (6 и 14 лет) и общим для этих возрастов выборочным среднеквадратическим отклонением. Поэтому для оценки чувствительности необходимо рассмотреть множество решений, соответствующих доверительным интервалам указанных статистик.

⁹ Более корректно говорить, что параметры модели определяются тремя упомянутыми выше характеристиками вместе с важным предположением о нормальности распределений. (Мы не можем утверждать, что десять параметров модели 2 определяются только тремя характеристиками.)

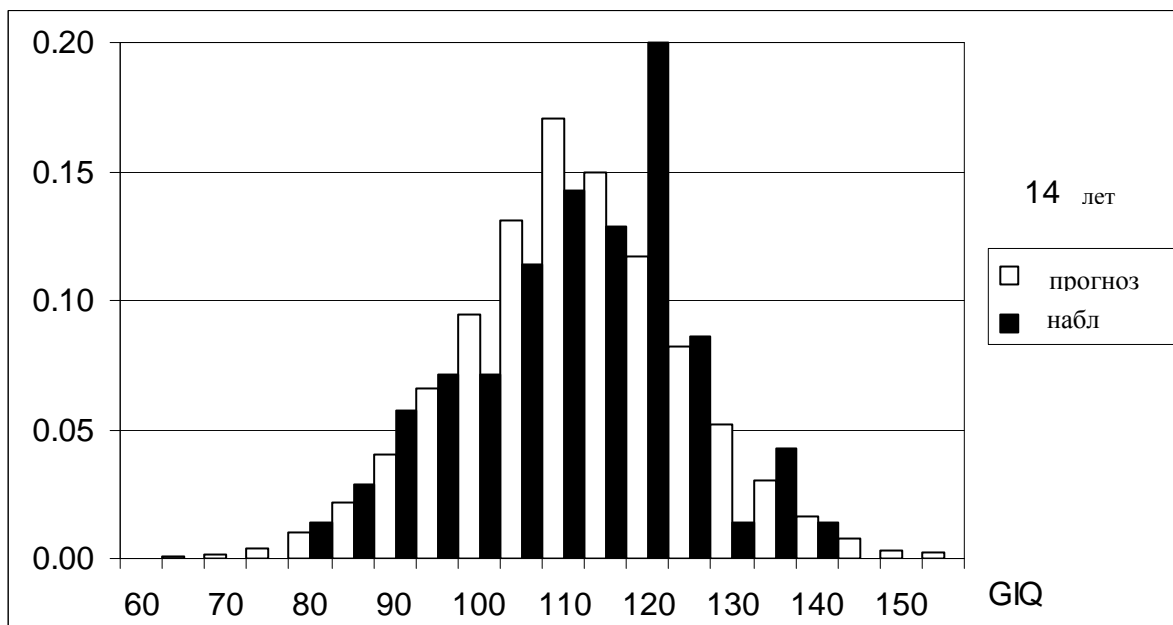
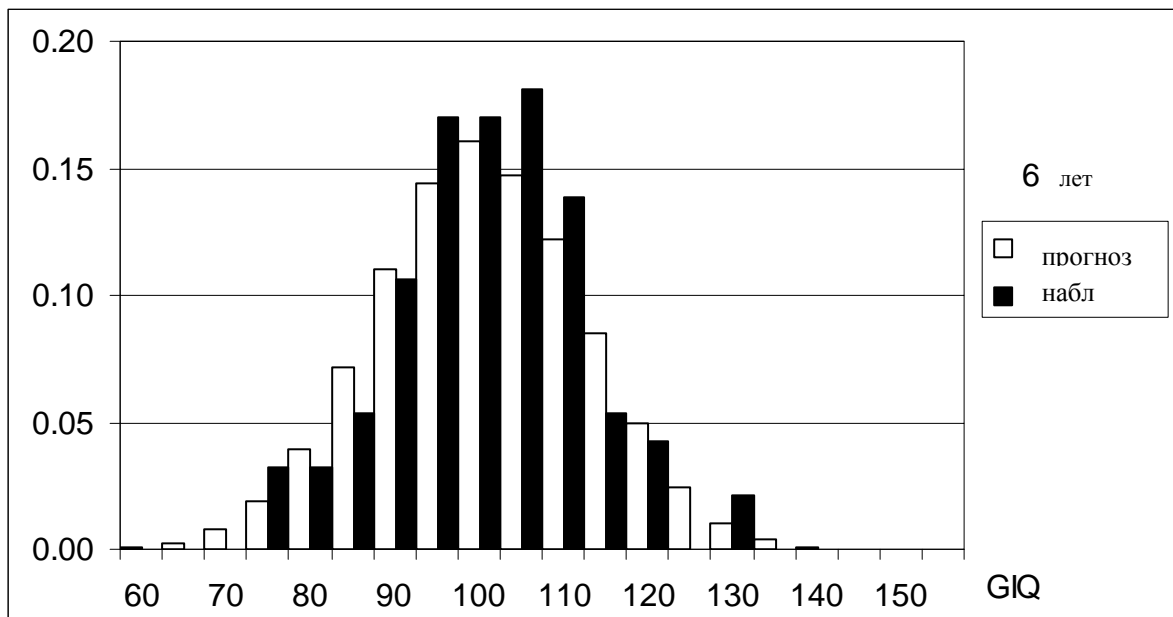


Рис. 1.7. Наблюдаемые и прогнозируемые частоты нахождения в состояниях для 6 и 14 лет.

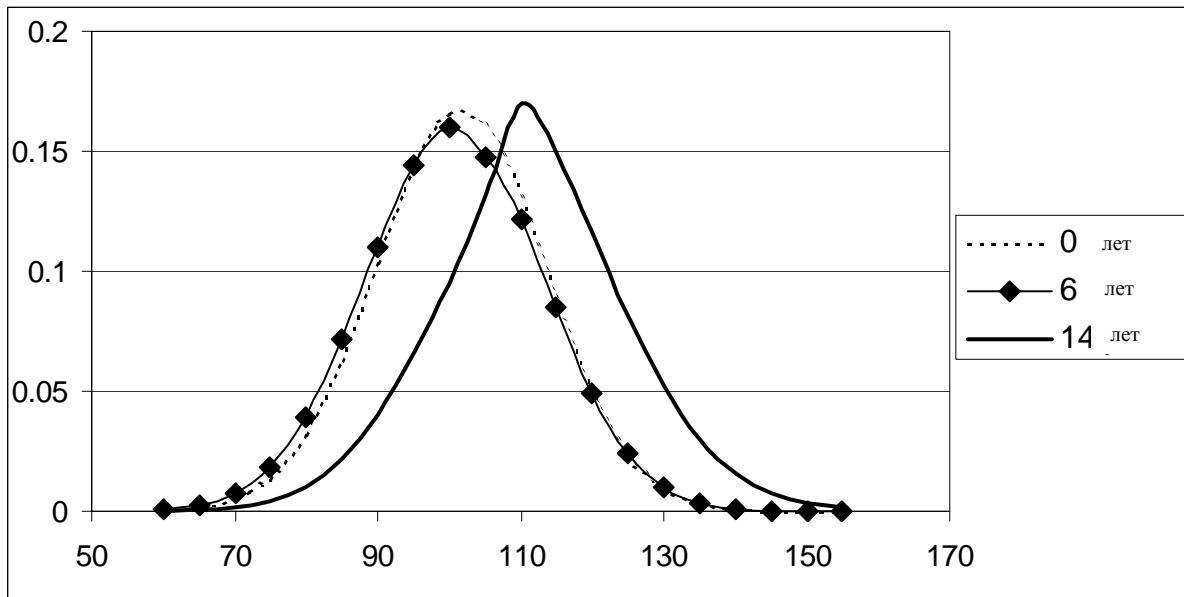


Рис. 1.8. Огибающие распределений прогнозируемых вероятностей нахождения в состояниях сети в момент рождения и в моменты наблюдений.

Если каждое истинное значение средних для возрастов 6 и 14 лет (m_6 and m_{14}), взятое в отдельности, попадает в заданный доверительный интервал¹⁰ с вероятностью 0,93, и то же самое верно и для истинного значения общего среднеквадратического отклонения¹¹ (σ_{6-14}), вероятность одновременного попадания этих трех величин в 93%-ные доверительные интервалы равна примерно 0,8¹². Чтобы оценить изменчивость решения в указанной 80%-ной доверительной области, оптимальные значения свободных параметров вычислялись для сочетаний доверительных границ, представленных в табл. 1.9. Эти сочетания использовались в качестве контрольных точек для исследования поведения решения. Несмотря на то, что данные, содержащиеся в табл. 1.9, показывают решения только в дискретных точках, они позволяют вывести достаточно надежные общие заключения (поскольку 93%-ные доверительные интервалы для m_6 , m_{14} и

¹⁰ Границы этого доверительного интервала оцениваются как $\bar{m} \pm \frac{st_{N-1,\alpha/2}}{\sqrt{N}}$, где \bar{m} - выборочное среднее значение, s - выборочное среднеквадратическое отклонение, N - объем выборки, $t_{n,\gamma}$ - 100 γ -% точка t -распределения с n степенями свободы.

¹¹ Границы этого доверительного интервала оцениваются как $\sqrt{\frac{(N-1)s^2}{\chi_{N-1,\alpha/2}^2}}$ и $\sqrt{\frac{(N-1)s^2}{\chi_{N-1,1-\alpha/2}^2}}$, где $\chi_{n,\gamma}^2$ - 100 γ -% точка χ^2 -распределения с n степенями свободы.

¹² $0,93^3 \approx 0,804$

σ_{6-14} покрывают достаточно узкие области, нет необходимости располагать контрольные точки более плотно).

Таблица 1.9. Модель 2: идентифицированные значения свободных параметров для контрольных точек 80%-ной доверительной области (*min* – наименьшее значение доверительного интервала, *max* – наибольшее значение доверительного интервала, *sam* – оценка по выборке, λ_{i-j} и μ_{i-j} - интенсивности переходов для диапазона возрастов i [$i=6$: 0-6 лет; $i=14$: 6-14 лет] и GIQ -диапазона j [$j=1$: $60 \leq GIQ < 110$; $j=2$: $110 \leq GIQ \leq 160$]).

m_6	m_{14}	σ_{6-14}	λ_{6-1}	λ_{14-1}	μ_{6-1}	μ_{14-1}	λ_{6-2}	λ_{14-2}	μ_{6-2}	μ_{14-2}	σ_0	m_0	Мера соответствия
min	min	min	0.00	0.29	0.01	0.00	0.00	0.23	0.00	0.04	11.14	96.04	0.94
min	min	max	0.01	0.28	0.01	0.00	0.01	0.24	0.00	0.02	13.62	95.84	0.56
min	max	min	0.01	0.48	0.00	0.00	0.01	0.35	0.00	0.04	11.20	95.71	1.50
min	max	max	0.23	0.46	0.31	0.00	0.23	0.36	0.29	0.03	10.20	98.24	0.95
max	min	min	0.05	0.16	0.10	0.00	0.06	0.13	0.08	0.01	10.03	101.8	0.41
max	min	max	0.12	0.15	0.19	0.00	0.13	0.13	0.18	0.01	11.80	102.5	0.22
max	max	min	0.00	0.33	0.02	0.00	0.00	0.25	0.01	0.02	11.04	101.2	1.13
max	max	max	0.12	0.31	0.18	0.00	0.12	0.26	0.17	0.01	11.79	102.5	0.65
sam	sam	sam	0.02	0.31	0.05	0.00	0.03	0.24	0.05	0.02	11.81	99.18	0.79

Другой способ оценки чувствительности связан с вычислением доверительных интервалов. Один из применяющихся на практике вариантов этого подхода сводится к постепенному удалению значения заданного свободного параметра от его оптимальной оценки до достижения заданного приращения меры соответствия, распределенной как χ^2 [48]. Однако мы не можем воспользоваться этим методом, так как, во-первых, наша мера соответствия не распределена требуемым образом и, во-вторых, главной целью исследования является выявление соотношений между параметрами модели, а не определение диапазонов их возможных значений, взятых независимо друг от друга.

1.4.4. Обсуждение результатов

Как правило, дети в России начинают ходить в школу в возрасте 6 или 7 лет. Поэтому диапазон от 0 до 6 лет соответствует, в основном, дошкольному развитию, а диапазон от 7 до 14 лет – первому этапу школьного обучения. Учитывая это, результаты, представленные в табл. 1.9 и на рис. 1.6, позволяют сделать следующие качественные выводы, справедливые для указанной выше 80%-й доверительной области:

1) в дошкольный период систематический фактор, как правило¹³, более способствует уменьшению GIQ , чем его увеличению;

2) в школьный период систематический фактор, наоборот, в значительно большей степени способствует увеличению GIQ , чем его уменьшению;

3) систематическое воздействие, направленное в сторону увеличения GIQ , в школьный период, как правило, намного эффективней, чем в дошкольный период;

4) в школьный период эффект систематического воздействия, направленного в сторону уменьшения GIQ , для детей, имеющих коэффициент умственного развития ниже среднего, пренебрежимо мал;

5) в школьный период эффект систематического воздействия, направленного в сторону уменьшения GIQ , значимо проявляется для детей, имеющих коэффициент умственного развития выше среднего;

6) в школьный период эффект систематического воздействия, направленного в сторону увеличения GIQ , для детей, имеющих коэффициент умственного развития выше среднего, не превышает аналогичную характеристику для детей, имеющих коэффициент умственного развития ниже среднего;

7) в школьный период эффект систематического воздействия, направленного в сторону уменьшения GIQ , для детей, имеющих коэффициент умственного развития выше среднего, намного превышает аналогичную характеристику для детей, имеющих коэффициент умственного развития ниже среднего;

8) в дошкольный период эффекты систематических воздействий, направленных как в сторону уменьшения, так и в сторону увеличения GIQ , не обнаруживают значимой зависимости от уровня коэффициента умственного развития.

Эти выводы согласуются с распространенным мнением о том, что обучение по стандартным программам более способствует развитию «слабых», а не одаренных детей. Однако, как указано в разделе 1.4.3, критерий Стьюдента демонстрирует эффективность российского школьного образования в среднем: средние значения общего коэффициента интеллектуального развития после посещения школы значимо увеличились. В то же время, в период дошкольного развития статистически значимый сдвиг в средних значениях не наблюдается: даже если бы ожидаемое значение m_0 было бы получено в результате точечной оценки по выборке, в 10 раз превышающей по объему имеющуюся выборку для 6-летнего возраста, критерий Стьюдента не показал бы значимых различий для m_0 и m_6 .

Целесообразно сопоставить вычисленные уровни интенсивностей переходов с аналогичными характеристиками, представленными в работах

¹³ Почти для всей 80%-ной доверительной области.

[42, 12] и описывающими конвергенцию и дивергенцию, обусловленную влиянием индивидуальной среды на близнецов, в случае одинаковых (5 единиц GIQ) диапазонов состояний. Фактически это означает использование *двумерной модели*, описывающей динамику двух независимых характеристик (рис. 1.9). Сравнение с данными из табл. 1.9 показывает, что только интенсивности переходов, направленных в школьный период в сторону увеличения GIQ , могут значительно превышать интенсивности переходов, обусловленных воздействием индивидуальной среды на близнецов. Интенсивности возрастания и убывания в дошкольный период могут быть сопоставимы с аналогичными характеристиками воздействия индивидуальной среды, а интенсивности убывания в школьный период намного меньше этих характеристик. Указанные факты говорят о значимости случайных ненаправленных воздействий на популяцию.

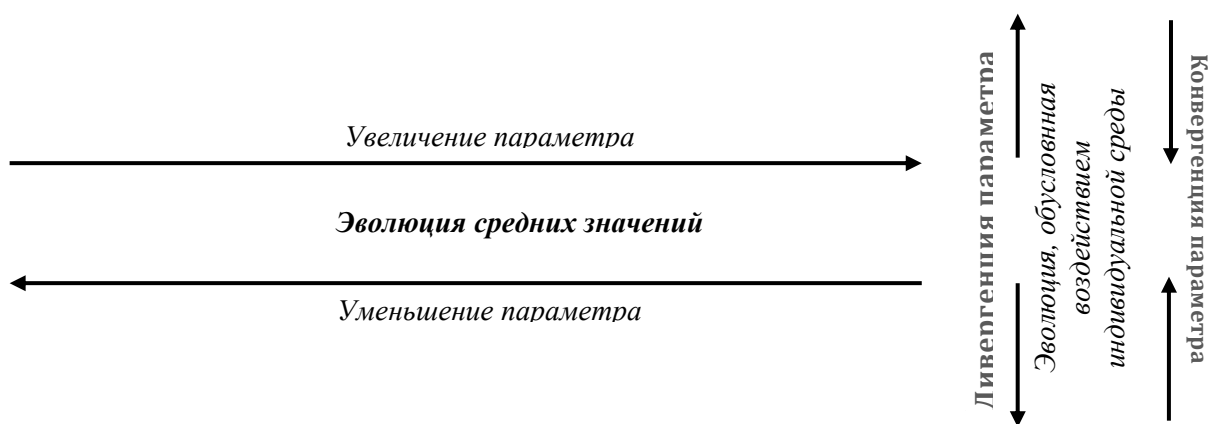


Рис. 1.9. Двумерное представление динамики индивидуальных характеристик.

Для того, чтобы сопоставить эффективность представленного метода и традиционных подходов, применяемых в лонгитюдных исследованиях, рассматриваемая выборка анализировалась с помощью классической *симплекс-модели*, используемой для изучения фенотипа. В этой модели, наблюдаемые GIQ в возрасте 6 и 14 лет представлялись переменными η_1 и η_2 , связь которых выражалась *уравнением авторегрессии 1-го порядка*:

$$\eta_2 = \beta_2 \eta_1 + \zeta_2,$$

где β_2 есть коэффициент регрессии, ζ_2 представляет случайную составляющую (*инновацию*¹⁴), некоррелированную с η_1 . Данная симплекс-модель представлена графически в виде диаграммы путей [47, 34] на рис. 1.10.

¹⁴ Инновация есть та часть дисперсии в данной контрольной точке, которая не обусловлена переменной, соответствующей предыдущей контрольной точке. Инновации не следует путать со случайными ошибками измерений, не влияющими на последующие наблюдаемые переменные. Ошибки измерений, которые часто включаются в классические симплекс-модели, здесь не рассматриваются.

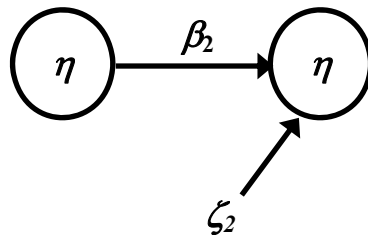


Рис. 1.10. Двухточечная симплекс-модель для изучения эволюции *GIQ*: переменные η_1 и η_2 представляют результаты измерения *GIQ* в 6 и 14 лет; β_2 – коэффициент регрессии; ζ_2 – инновация в 14 лет.

Модель имеет три параметра: η_1 , ζ_2 и β_2 . Прогнозируемая ковариационная матрица переменных η_1 и η_2 выражается следующим образом:

$$\begin{pmatrix} \text{var } \eta_1 & \beta_2 \text{ var } \eta_1 \\ \beta_2 \text{ var } \eta_1 & \beta_2^2 \text{ var } \eta_1 + \text{var } \zeta_2 \end{pmatrix}.$$

Поскольку число свободных параметров равно числу независимых наблюдаемых статистик в соответствующей ковариационной матрице, подбор оптимальных значений свободных параметров дает полное совпадение прогнозируемой и наблюдаемой ковариационных матриц и следующие оценки: $\text{var } \eta_1=117$, $\text{var } \zeta_2=122$, $\text{var } \beta_2=0,7$.

Как инновация, так и коэффициент регрессии статистически значимы: если каждый из них в отдельности приравнять нулю, то мера соответствия наблюдаемой и оптимальной прогнозируемой ковариационных матриц, взятая в форме функции максимального правдоподобия¹⁵, получает статистически значимое приращение для получающегося при этом увеличения числа степеней свободы на единицу.

Значительная часть (68%) наблюдаемой дисперсии для 14-летнего возраста обусловлена инновацией. Дисперсия в предыдущей контрольной точке (6 лет) объясняет примерно в два раза меньше (32%). Указанные пропорции представляют всю ограниченную информацию, которую можно извлечь из анализа ковариационных структур. Очевидно, что предлагаемый подход дает более широкие возможности.

Разумеется, можно взять дополнительные контрольные точки и, исследовав соответствующие ковариационные матрицы, получить больший объем информации. Однако хорошо известно, что эксперименты и тестирование – более трудоемкие и дорогие мероприятия, чем анализ данных. Сети Маркова позволяют не только больше узнать о причинах изменений фенотипа, но и распространить результаты наблюдений на

¹⁵ При достаточно общих предположениях [22] значения этой функции распределены как χ^2 .

неконтролируемые моменты времени (в нашем случае – на весь временной интервал от рождения до 14-летнего возраста). Однако, используя симплекс- или марковские модели, мы анализируем различные характеристики: в первом случае – составляющие наблюдаемой дисперсии, объясняемые различными факторами; во втором – интенсивности переходов, обусловленные воздействием систематического фактора. Сети Маркова в рассмотренной здесь форме не приспособлены для анализа ковариационных (корреляционных) структур.

В целом, на одних и тех же исходных данных, сети Маркова, как правило, обеспечивают более глубокий анализ, чем симплекс-модели.

1.5. ПРИМЕР 3. ИССЛЕДОВАНИЕ ПОВЕДЕНИЯ ТЕХНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

В этом разделе рассматриваются особенности применения марковских моделей для анализа и прогнозирования усталостного разрушения акустически нагруженных тонкостенных конструкций. Описание соответствующей технической задачи представлено в разделе 3.7.1.

1.5.1. Моделирование

Рассмотрим применения компонентов описываемой технологии для диагностики усталостных разрушений панели воздухозаборника маневренного самолета, представленной на рис. 1.11. Распознаваемыми состояниями конструкции являются:

- **OK** – неповрежденная конструкция;
- **Center** - поврежден 1 сварной шов в центре панели (зона 1);
- **Left** – повреждены 2 сварных шва в левой части панели (зона 2);
- **Right** – повреждены 2 сварных шва в правой части панели (зона 3);
- **Bound** – изменились условия закрепления панели (с заземления на шарнирное опирание).

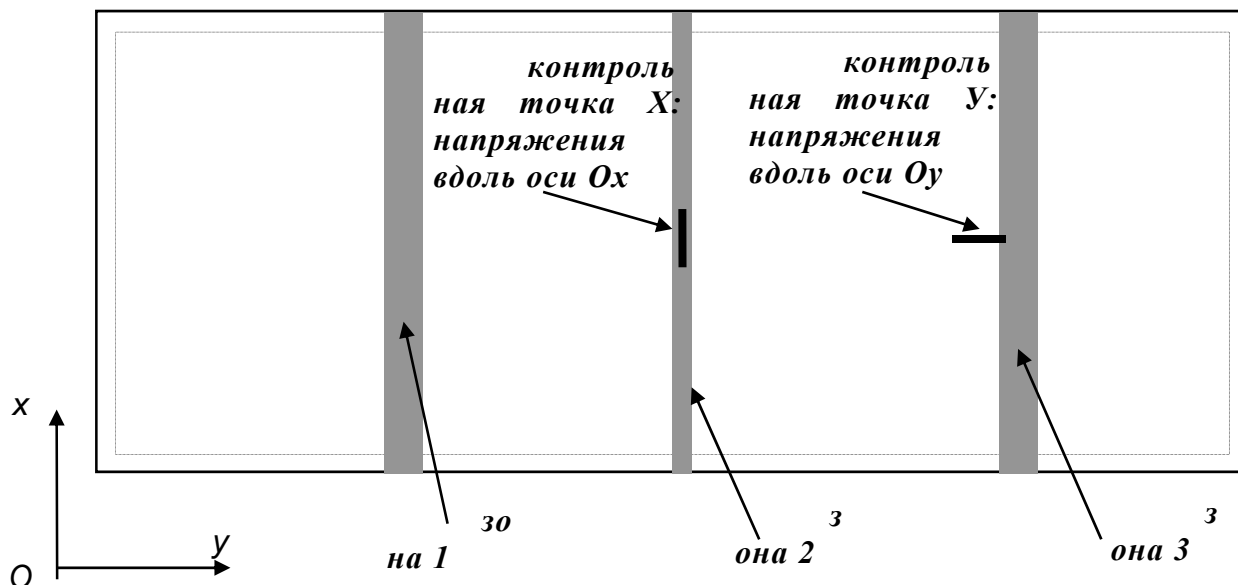


Рис. 1.11. Параметры конструкции и нагрузки: конструкция – стальная трёхслойная прямоугольная панель размером 826×268 мм, наполнитель – гофр высотой 10 мм, толщина несущих слоев – 1 и 0,5 мм, краевые условия – защемление; масса панели – 4,050 кг; относительное демпфирование – 0,005 (на всех частотах); в качестве нагрузки использовались 4 широкополосных случайных процесса с уровнями 143,4, 152, 157,7 и 161,1 дБ и различными формами спектров.

Первое из указанных состояний соответствует нормальному режиму работы, а последующие четыре – рассматривались как варианты работы системы с неисправностями.

1.5.2. Прогнозирование вероятностей повреждений

Для построения оценок вероятностей появления повреждений может быть использована диаграмма, представленная на рис. 1.12. Она отражает взаимные связи между различными типами повреждений. Состоянию **Unknown** соответствуют все не описанные ранее типы повреждений. Распределение интенсивностей учитывает симметрию системы.

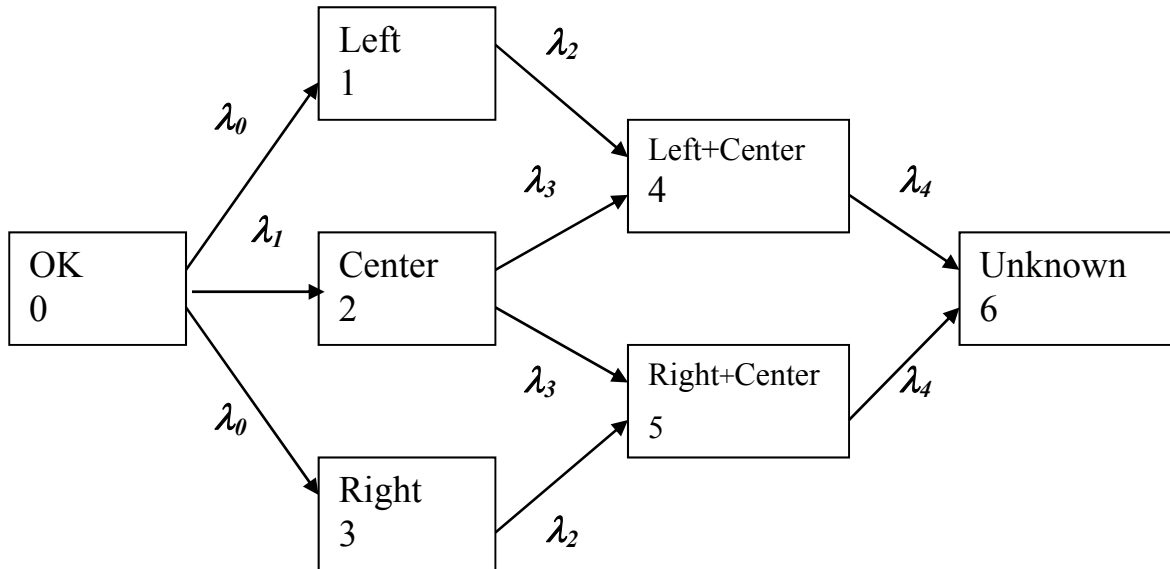


Рис. 1.12. Марковская модель, описывающая взаимные связи между различными типами повреждений. λ_i ($i=1, \dots, 4$) есть интенсивности переходов, которые являются свободными параметрами модели, определяемыми путем решения обратной задачи (они вычисляются как коэффициенты дифференциальных уравнений, обеспечивающих решение, наиболее близкое к данному).

Динамика изменения во времени вероятностей нахождения системы в различных состояниях описывается следующей системой обыкновенных дифференциальных уравнений (p_i есть вероятность нахождения в состоянии с номером i):

$$\frac{dp_0}{dt} = -2\lambda_0 p_0 - \lambda_1 p_0,$$

$$\frac{dp_1}{dt} = \lambda_0 p_0 - \lambda_2 p_1,$$

$$\frac{dp_2}{dt} = \lambda_1 p_0 - 2\lambda_3 p_2,$$

$$\frac{dp_3}{dt} = \lambda_0 p_0 - \lambda_2 p_3,$$

$$\frac{dp_4}{dt} = \lambda_2 p_1 + \lambda_3 p_2 - \lambda_4 p_4,$$

$$\frac{dp_5}{dt} = \lambda_2 p_3 + \lambda_3 p_2 - \lambda_4 p_5,$$

$$\frac{dp_6}{dt} = \lambda_4 p_4 + \lambda_4 p_5.$$

Для интегрирования этой системы необходимо задать начальные условия:

$$p_0(0) = 1, p_1(0) = p_2(0) = \dots p_6(0) = 0.$$

Нормализующее условие $\sum_{k=0}^6 p_k(t) = 1$ выполняется в любой момент времени.

Конечные значения вероятностей p_0, p_1, \dots, p_6 в заданных временных точках, определенные путем численного интегрирования, могут рассматриваться как функции свободных параметров. Эти значения согласуются с точным решением с точностью до ошибки численного интегрирования, которая может быть сделана как угодно малой. Можно показать, что в некоторой окрестности решения, найденного процедурой оптимизации, истинны следующие утверждения:

- набор значений свободных параметров, для которого градиент меры соответствия равен нулю, существует и единственен;
- этот набор значений свободных параметров при неограниченно возрастающем количестве наблюдений сходится по вероятности к множеству значений, дающему истинные вероятности p_0, p_1, \dots, p_6 ;
- указанная выше мера соответствия асимптотически описывается распределением хи-квадрат с числом степеней свободы, равным разности между количеством наблюдаемых независимых статистик и количеством свободных параметров.

Строгая формулировка и доказательство соответствующей теоремы могут быть найдены, например, в монографии Г. Крамера [9]. Истинность посылок этой теоремы для рассматриваемой задачи была проверена с помощью специальной численной процедуры, закодированной в электронной таблице.

Процедура оптимизации, используемая для определения значений свободных параметров, обеспечивала с заданной точностью нахождение строгих локальных минимумов (если они имелись). Поскольку при этом определялась точка, в которой градиент равен нулю, данная точка была единственной в некоторой окрестности найденного решения (с точностью до ошибки численного метода).

Статистические критерии позволяют оптимизировать модель, подбирая такие соотношения между интенсивностями потоков событий, которые обеспечивают наилучшее согласование с результатами наблюдений. Соответствующие оценки для различных вариантов моделей показаны в таблице 1.9. Для сравнения моделей используется критерий хи-квадрат, а именно: мера согласованности для полной модели (модели 1) сравнивается с аналогичной характеристикой для упрощенных моделей. Поскольку разность в значениях критерия хи-квадрат для полной и упрощенных моделей сама распределена как хи-квадрат, она используется для выяснения того, приводят ли упрощения к статистически значимым изменениям, или нет [11].

Таблица 1.10. Согласование с результатами наблюдений различных вариантов моделей, соответствующих диаграмме на рис. 1.12 (для распределения неисправностей по истечении 2000 часов эксплуатации).

№	Модель	Значение статистики, описывающей распределение хи-квадрат	Количество степеней свободы	p-значение	Информационный критерий Акаике	Хи-квадрат разность (сравнение с моделью 1)	Разность по степеням свободы	p-значение для разности
1	$\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ (все интенсивности потоков событий независимы)	0,144	1	0,705	-1,9	-	-	-
2	$\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2=\lambda_3, \lambda_4$	0,144	2	0,931	-3,9	0,000	1	0,999 ¹⁶
3	$\lambda_0=\lambda_1, \lambda_2=\lambda_3, \lambda_4$	9,416	3	0,024	3,4	9,273	2	0,010 ¹⁷
4	$\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2=\lambda_3=\lambda_4$	7,142	3	0,068	1,1	6,999	2	0,030 ¹⁸

Как видно из таблицы, наиболее согласованными с результатами наблюдений являются модели 1 и 2. Модель 2 предпочтительней, поскольку она проще. Гистограмма, описывающая наблюдаемые частоты появления неисправностей, и соответствующая ей гистограмма, прогнозируемая согласно модели 2, представлены на рис. 1.13, а прогнозируемые вероятности нахождения системы в различных состояниях (как функции времени) – на рис. 1.14. На рис. 1.15 отдельно показаны графики, описывающие, как изменяются со временем вероятность нахождения системы в неповрежденном состоянии и вероятность получения более одного повреждения.

¹⁶ Нет статистически значимых различий по сравнению с моделью 1.

¹⁷ Есть статистически значимые различия по сравнению с моделью 1.

¹⁸ Есть статистически значимые различия по сравнению с моделью 1.

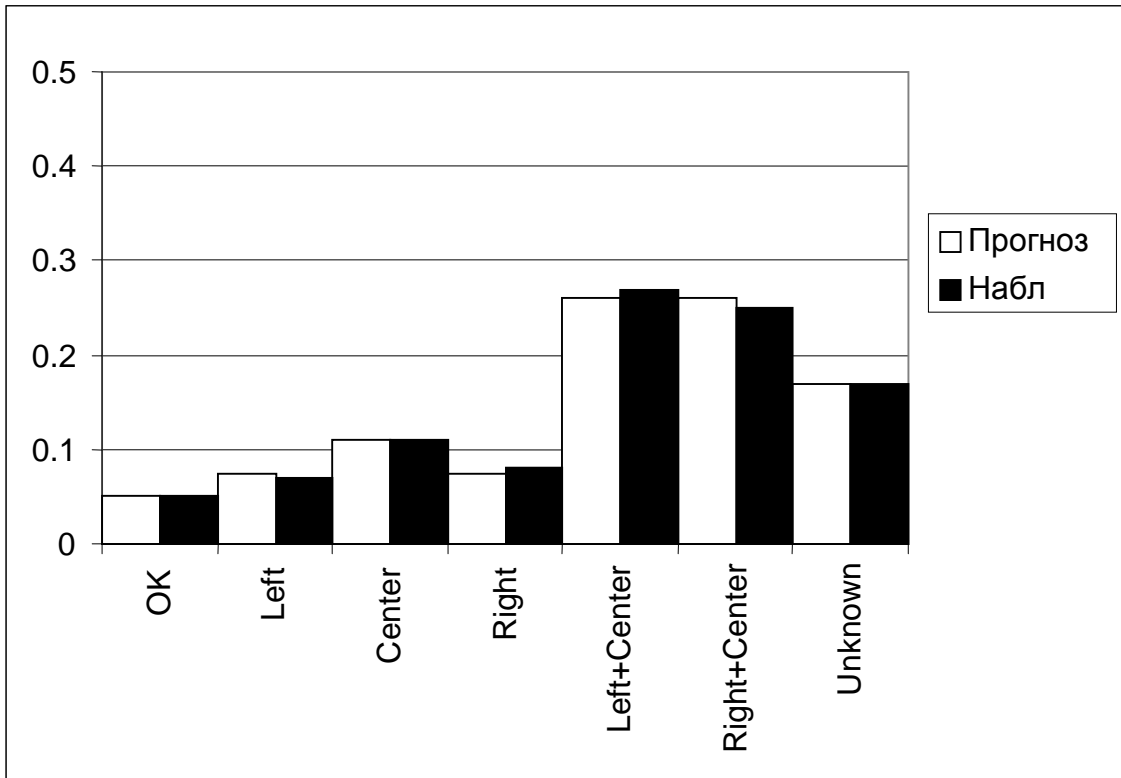


Рис. 1.13. Наблюдаемая и прогнозируемая гистограммы частот появления неисправностей ($\lambda_0=0,0003$, $\lambda_1=0,0009$, $\lambda_2=0,0007$, $\lambda_3=0,0007$, $\lambda_4=0,0003$).

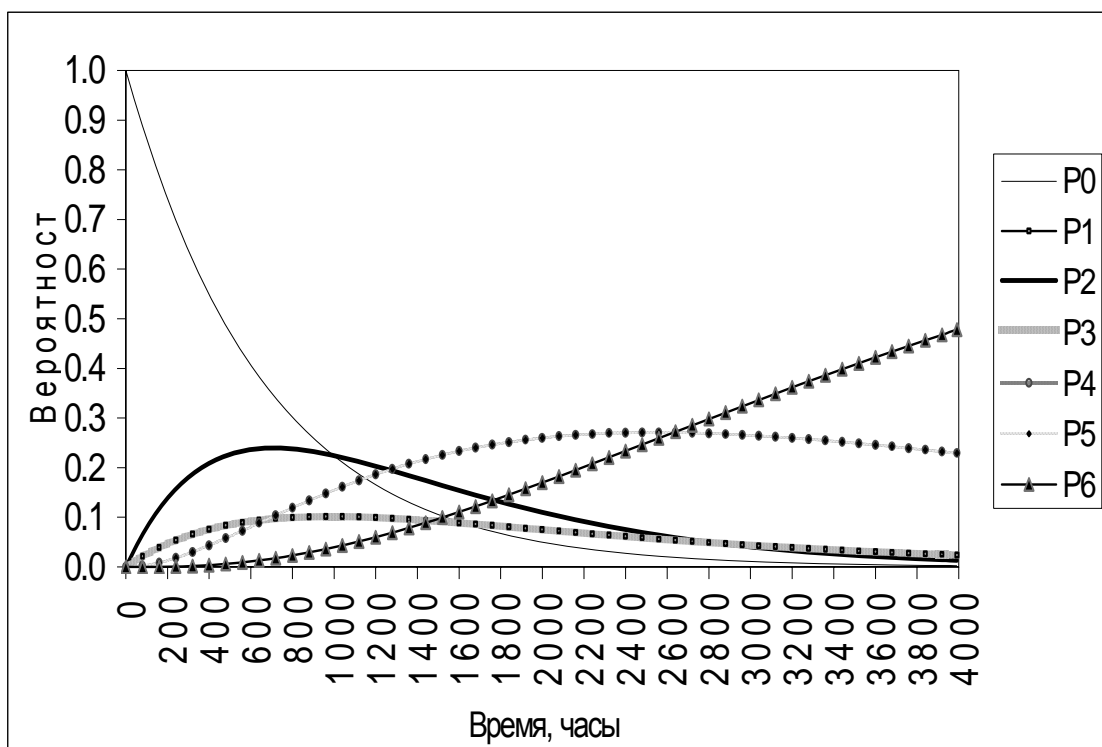


Рис. 1.14. Прогнозируемые вероятности нахождения системы в различных состояниях как функции времени (состояния обозначены как P0, P1, ..., P6).

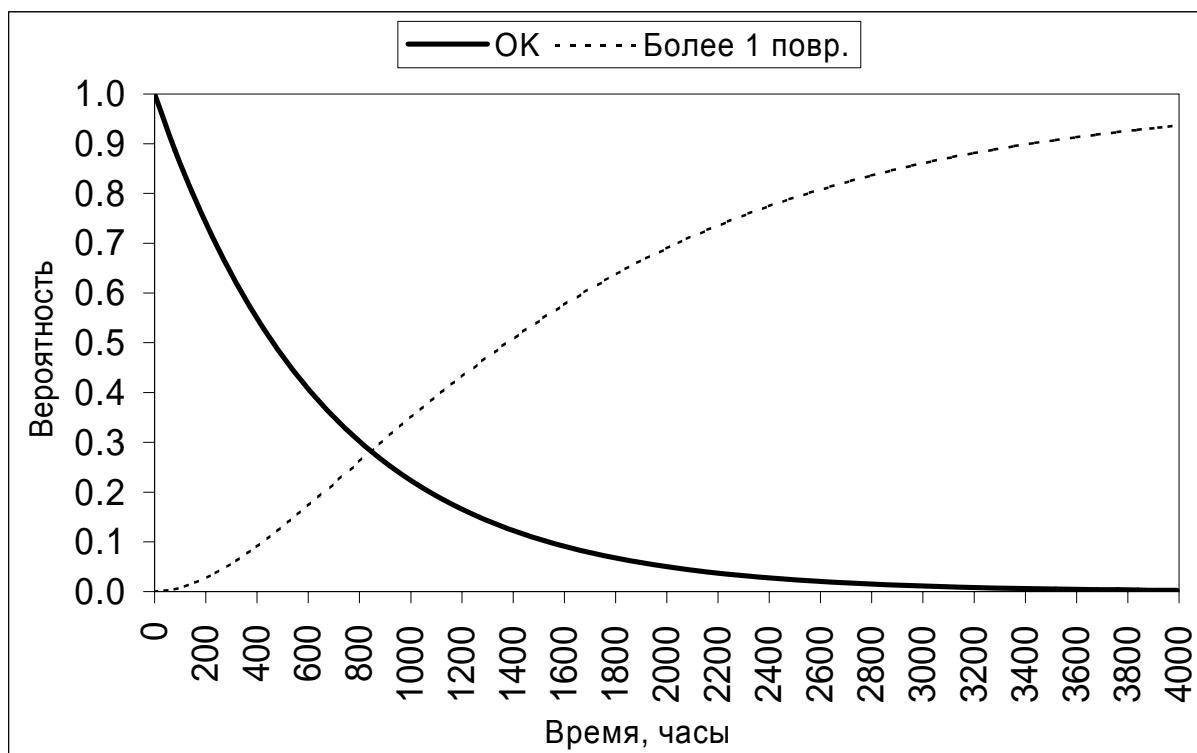


Рис. 1.15. Прогнозируемые вероятность нахождения системы в неповрежденном состоянии и вероятность получения более одного повреждения как функции времени.

Другой способ построения марковских моделей для исследования усталостного разрушения рассмотрен в книге [12]. Анализируемой величиной является степень разрушения конструкции, выраженная в процентах от продолжительности срока ее службы. Допустимый диапазон значений этой величины делится на несколько интервалов. Каждый интервал рассматривается как отдельное состояние, в котором разрушаемая конструкция может находиться с некоторой вероятностью, переходя из одного состояния в другое по определенным правилам. Количество состояний определяется желаемой точностью оценок и объемом доступной выборки результатов наблюдений. Например, если для типового состояния системы выбрать 10%-ный интервал, то состоянию x_0 будет соответствовать диапазон от 0% to 10%, состоянию x_1 – от 10% до 20% и так далее. Состоянию x_{10} будет соответствовать 100%-е разрушение (выход конструкции из строя).

Распределение вероятностей нахождения в заданных состояниях в момент начала эксплуатации представляет собой начальное распределение разрушения (параметры различных образцов одной и той же конструкции могут различаться). В результате воздействия среды начальное распределение вероятностей в течение времени наблюдения трансформируется в некоторое текущее распределение.

Для идентификации интенсивностей потоков событий используются гистограммы, описывающие распределения продолжительностей сроков службы для достаточно больших выборок образцов конструкций. При моделировании процесса развития повреждений используется система, показанная на рис. 1.16. Она представляет собой конечную цепь из $n + 1$ состояний, в которой переходы из состояния x_k ($k \neq 0, k \neq n$) возможны только в предшествующее состояние x_{k-1} или в следующее по порядку состояние x_{k+1} . Из состояния x_0 доступно только состояние x_1 . Состояние x_n соответствует выходу конструкции из строя и не имеет выходов.

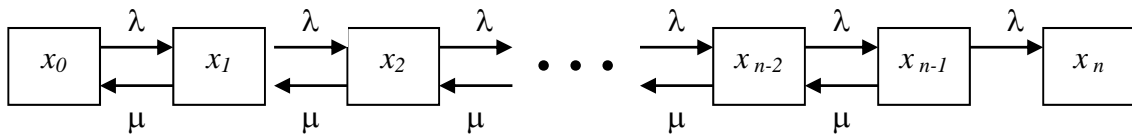


Рис. 1.16. Состояния x_i ($i=0,1, \dots,n-1$): от $100i/n$ до $100(i+1)/n$ %

продолжительности срока службы; состояние x_n : выход конструкции из строя;

λ и μ - интенсивности потоков (λ - интенсивность разрушения, μ - интенсивность восстановления).

Интенсивности потоков событий обозначаются как λ и μ . Параметры λ описывают развитие повреждений под воздействием среды. Параметры μ представляют способность среды восстанавливать конструкцию (учет этой возможности обычно не является необходимым, однако в общем случае, для полноты модели, ее желательно иметь в виду). Поскольку состояния выражаются в процентах от величины, измеряемой в единицах времени, интенсивности потоков полагаются не зависящими от номера состояния.

Динамика изменения во времени вероятностей нахождения в различных состояниях описывается следующей системой обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\frac{dp_0(t)}{dt} = -\lambda p_0(t) + \mu p_1(t);$$

.....

$$\frac{dp_k(t)}{dt} = -(\lambda + \mu) p_k(t) + \lambda p_{k-1}(t) + \mu p_{k+1}(t)$$

$$(k = 1, 2, \dots, n - 1);$$

.....

$$\frac{dp_n(t)}{dt} = \lambda p_{n-1}(t)$$

где $p_k(t)$ - вероятность нахождения в состоянии x_k в момент времени t .

Для интегрирования указанной системы необходимо задать начальные условия: $p_0(0), p_1(0), \dots, p_n(0)$ ($\sum_{k=0}^n p_k(0) = 1$). Нормализующее условие

$\sum_{k=0}^n p_k(t) = 1$ выполняется в любой момент времени.

В ряде случаев можно предполагать, что существует разброс параметров конструкций в начальный момент времени, обусловленный производственными дефектами, который описывается усеченным нормальным распределением с неотрицательным средним. Усеченность распределения связана с тем, что приемлемыми являются только значения из диапазона от 0% до 100%. Для обеспечения равенства полной вероятности единице усеченное распределение нормируется.

В указанных выше терминах, оценка параметров разрушения сводится к вычислению интенсивностей потоков λ и μ и параметров распределения начальных дефектов. В качестве оценок используются значения, обеспечивающие наилучшее соответствие наблюдаемых и прогнозируемых частот попадания в определенное состояние системы в заданные моменты времени. Прогнозируемые вероятности нахождения в состояниях вычисляются путем численного интегрирования приведенной выше системы уравнений.

Предлагаемый подход был применен для анализа усталостного разрушения панелей воздухозаборника маневренного самолета (рис. 1.11). Исходным материалом для оценок являлась информация о распределении продолжительностей сроков службы данной конструкции в виде соответствующей гистограммы. Эта гистограмма, представленная на рис. 1.17, показывает распределение сроков службы для 118 панелей, наблюдавшихся в процессе их эксплуатации.

В качестве единицы измерения времени использован час. Модель для исследования развития разрушения представляет собой цепь из 11-ти состояний (состоянию соответствовал 10%-ный диапазон разрушения). Статистики хи-квадрат и оценки свободных параметров, полученные в результате подбора наиболее согласованных с наблюдениями моделей, приведены в таблицах 1.11 и 1.12. Способность конструкции к восстановлению рассматривалась только с демонстрационными целями (она не имеет значимого обоснования в данном примере).

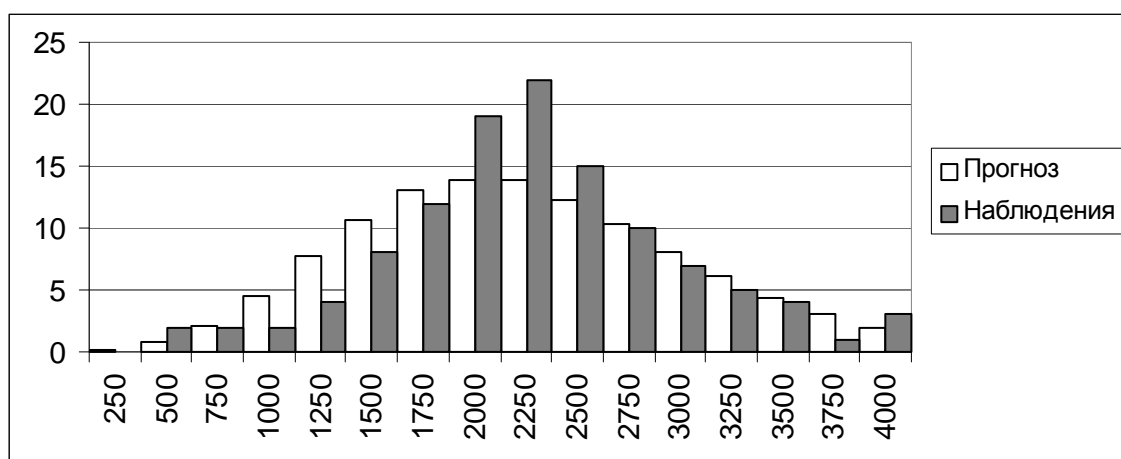


Рис. 1.17. Наблюдаемые и прогнозируемые гистограммы продолжительностей сроков службы (в часах), полученные с помощью модели 3.

Критерий хи-квадрат также использовался для сравнения различных вариантов моделей, а именно: мера согласованности для более полных моделей сравнивалась с аналогичной характеристикой для упрощенных моделей, в которых некоторые из свободных параметров полагались равными нулю.

Таблица 1.11. Согласование с результатами наблюдений различных вариантов моделей, соответствующих диаграмме на рис. 1.12.

№	Характеристики модели	Значение статистики, описывающей распределением хи-квадрат	Количество степеней свободы	p-значение	Хи-квадрат разность (сравнение с предыдущей моделью)	Разность по степеням свободы	p-значение для разности
1	Разрушение, восстановление, начальные дефекты конструкции	15.799	11	0.149	-	-	-
2	Разрушение, восстановление, начальные дефекты конструкции с нулевым средним	15.801	12	0.201	0.002	1	0.965 ¹⁹
3	Разрушение, начальные дефекты конструкции с нулевым средним	15.801	13	0.260	0.000	1	1 ²⁰
4	Разрушение	124.660	14	0.000	108.86	1	0.000 ²¹

¹⁹ Нет статистически значимых различий по сравнению с моделью 1.

²⁰ Нет статистически значимых различий по сравнению с моделью 2.

²¹ Есть статистически значимые различия по сравнению с моделью 3.

Таблица 1.12. Оценки параметров статистических моделей, представленных в таблице 1.11.

№	Характеристики модели	Среднее время 10%-го разрушения, (часы)	Среднее время 10%-го восстановления (часы)	Среднеквадратическое отклонение для начального разрушения, %	Среднее значение эквивалентного начального разрушения, %
1	Разрушение, восстановление, начальные дефекты конструкции	258	Бесконечно	25.9	0.01
2	Разрушение, восстановление, начальные дефекты конструкции с нулевым средним	258	Бесконечно	25.9	0
3	Разрушение, начальные дефекты конструкции с нулевым средним	258	-	25.9	0
4	Разрушение	188	-	-	-

Сравнение мер согласованности показывает, что наилучшее согласование достигается, если модель учитывает разрушение, обусловленное влиянием среды, и начальный разброс параметров конструкций, обусловленный производственными дефектами (модель 3 с приемлемым p -значением, равным 0.260). Оптимальная модель не должна учитывать восстановление конструкции и возможность существования ненулевого среднего значения в распределении начального разброса параметров, поскольку учет этих элементов не улучшает согласованность (как видно из таблиц, мера согласованности при переходе к соответствующим моделям не изменяется статистически значимо). Модель должна учитывать начальный разброс параметров конструкций, так как исключение этого элемента приводит к статистически значимому ухудшению меры согласованности.

Гистограмма наблюдаемых сроков службы и соответствующая прогнозируемая гистограмма, полученная с помощью модели 3, приведены на рис. 1.17. На рис. 1.18 представлено начальное распределение степеней разрушения для этой модели. Рис. 1.19 показывает, как вероятности нахождения в указанных состояниях изменяются во временной области. Кривая 100%-го разрушения позволяет делать выводы об ожидаемом сроке службы. И, в качестве конечного результата, на рис. 1.20 даны практически важные сводные графики, которые дают конструкторам возможность принимать мотивированные решения по поводу регламента плановых осмотров конструкции. Эти графики, построенные на базе кривых, приведенных на рис. 1.19, позволяют определять время достижения указанного уровня разрушения с заданными вероятностями.

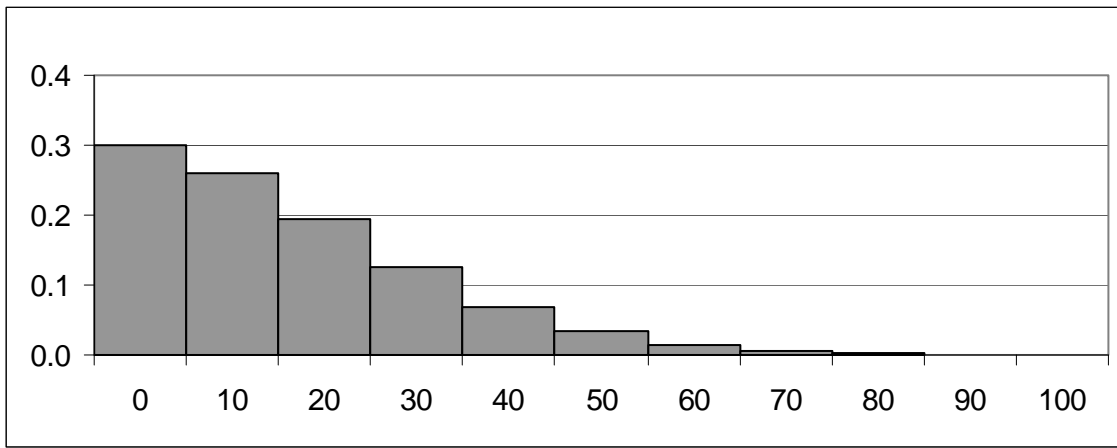


Рис. 1.18. Распределение начального разрушения конструкций для модели 3: ось абсцисс - уровни разрушения в %, ось ординат - вероятности.

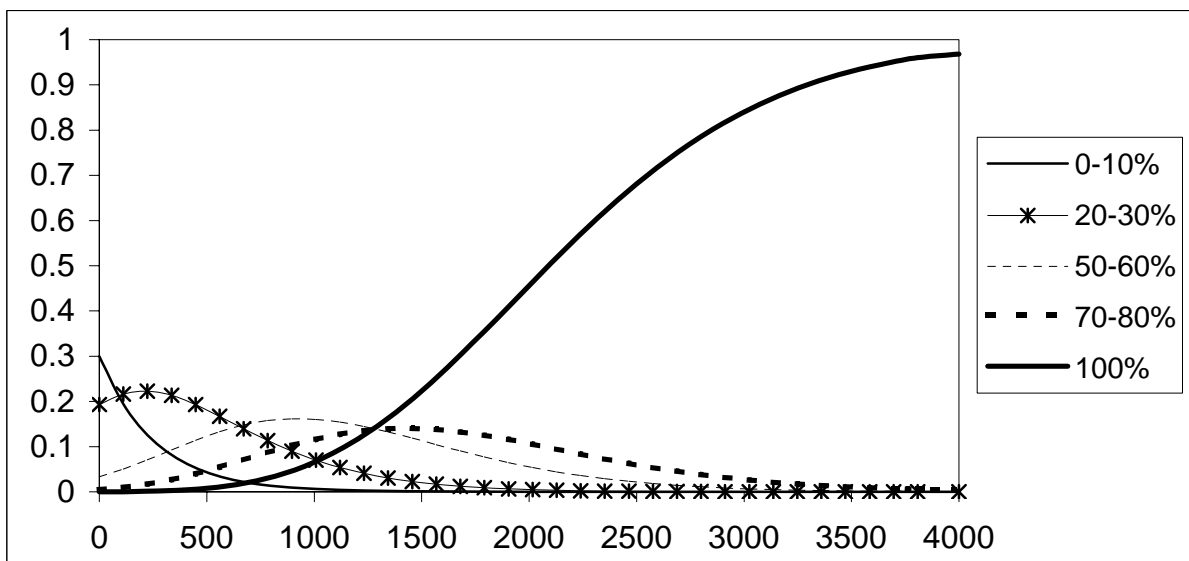


Рис. 1.19. Вероятности нахождения внутри указанных границ степеней разрушения как функции времени (в часах) (модель 3).

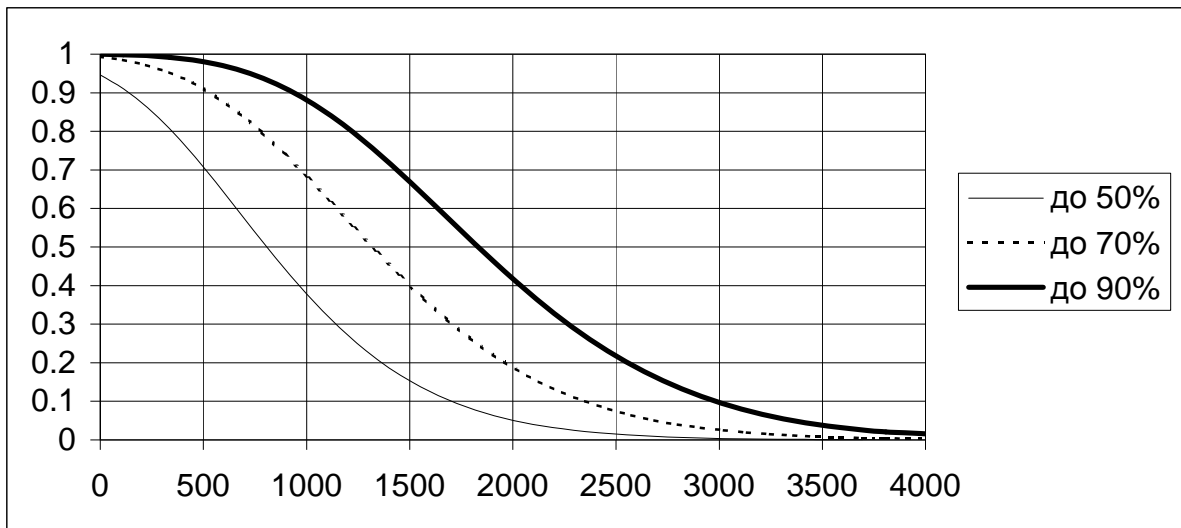


Рис. 1.20. Суммарные вероятности нахождения внутри указанных границ степеней разрушения как функции времени (в часах) (модель3).

1.6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Параметрические модели, описывающиеся марковскими случайными процессами с дискретными состояниями и непрерывным временем, позволяют прогнозировать динамику изменения вероятностей пребывания в состояниях исследуемых систем. Прогноз обеспечивается вычислением интенсивностей потоков событий, приводящих к решению, наиболее близкому к результатам наблюдений, с последующим интегрированием полученной системы обыкновенных дифференциальных уравнений Колмогорова. Марковские модели при данной постановке задачи выступают в роли специализированных нейронных сетей.

ЛИТЕРАТУРА К РАЗДЕЛАМ 1.1 И 1.2

1. Bollen K. A. *Structural equations with latent variables*. – New York: John Wiley, 1989.
2. Boomsma D. I., Martin N. G., Molenaar P. C. M. *Factor and simplex models for repeated measures: Application to two psychomotor measures of alcohol sensitivity in twins*. -Behavior Genetics, 1989; **19**: pp. 79-96.
3. Dolan C. V., Molenaar P. C. M., Boomsma D. I. *Longitudinal genetic analysis of longitudinal means and covariance structure in the simplex model using LISREL*. - Behavior Genetics, 1991; **21**; pp. 49-61.
4. Jöreskog K. G. *Estimation and testing of simplex models*. - British Journal of Mathematical and Statistical Psychology, 1970; **23**: pp. 121-145.
5. Kuravsky L. S., Baranov S. N. *Condition monitoring of the structures suffered acoustic fatigue failure and forecasting their service life*. – In: Proc. Condition Monitoring 2003, Oxford, United Kingdom, July 2003, pp. 256-279.
6. Kuravsky L. S., Baranov S. N. *Synthesis of Markov networks for forecasting fatigue failures*. – In: Proc. Condition Monitoring 2003, Oxford, United Kingdom, July 2003, pp. 76-91.
7. Kuravsky L. S., Malykh S. B. *Application of Markov models for analysis of development of psychological characteristics*. - Australian Journal of Educational & Developmental Psychology, 2004; **2**: pp. 29-40.
8. Kuravsky L. S., Malykh S. B. *On the application of queuing theory for analysis of twin data*. - Twin Research, 2000; **3**: pp. 92-98.
9. Kuravsky L.S. and Baranov S.N. *Neural networks in fatigue damage recognition: diagnostics and statistical analysis*. – In: Proc. 11th International Congress on Sound and Vibration, St.-Petersburg, Russia, July 2004, pp. 2929-2944.

10. Neale M. C., Cardon L. R. *Methodology for genetic studies of twins and families*. – Kluwer Academic Publishers: Dordrecht, the Netherlands, 1992.
11. Wechsler D. *Wechsler Intelligence Scale for Children*. – NY, 1949.
12. Крамер Г. *Математические методы статистики*. – М.: Мир, 1976. – 648 с.
13. Куравский Л. С., Баранов С. Н. *Диагностика и прогнозирование усталостного разрушения авиационных конструкций*. // В кн.: *Нейрокомпьютеры в авиации (самолеты)*/ Под ред. В. И. Васильева, Б. Г. Ильясова и С. Т. Кусимова: Учеб. пособие. – М.: Радиотехника, 2004. – 496 с.
14. Куравский Л. С., Баранов С. Н. *Применение нейронных сетей для диагностики и прогнозирования усталостного разрушения тонкостенных конструкций*. – *Нейрокомпьютеры: разработка и применение*, 2001, №12, с. 47-63.
15. Куравский Л.С., Баранов С. Н., Малых С. Б. *Нейронные сети в задачах прогнозирования, диагностики и анализа данных: Учеб. пособие*. – М.: РУСАВИА, 2003. – 100 с.
16. Овчаров Л. А. *Прикладные задачи теории массового обслуживания*. – М.: Машиностроение, 1969. – 324 с.
17. <http://www.solver.com>.

ЛИТЕРАТУРА К РАЗДЕЛАМ 1.3 И 1.4

1. Баранов С. Н., Куравский Л. С. *Акустические вибрации: моделирование, оптимизация и диагностика*. – М.: РУСАВИА, 2001.
2. Бахвалов Н. С. *Численные методы*. – М.: Наука, 1975.
3. Бендат Дж., Пирсол А. *Прикладной анализ случайных данных*. – М.: Мир, 1989.
4. Богданофф Дж., Козин Ф. *Вероятностные модели накопления повреждений*. – М.: Мир, 1989.
5. Галушкин А. И. *Синтез многослойных систем распознавания образов*. – М.: Энергия, 1974.
6. Галушкин А. И. *Теория нейронных сетей*. – М.: ИПРЖР, 2000.
7. Головкин В. А. *Нейронные сети: обучение, организация и применение*. – М.: ИПРЖР, 2001.
8. Крамер Г. *Математические методы статистики*. – М.: Мир, 1976.
9. Круглов В. В., Борисов В. В. *Искусственные нейронные сети. Теория и практика*. – М.: Горячая линия – Телеком, 2001.
10. Куравский Л. С., Баранов С. Н. *Применение нейронных сетей для диагностики и прогнозирования усталостного разрушения тонкостенных конструкций*. – *Нейрокомпьютеры: разработка и применение*, 2001, № 12, с. 47-63.

11. Куравский Л. С., Баранов С. Н. *Синтез сетей Маркова для прогнозирования усталостного разрушения*. – Нейрокомпьютеры: разработка и применение, 2002, № 11, с. 29-40.
12. Куравский Л. С., Малых С. Б. *Анализ динамики средовых влияний в близнецовых исследованиях*. – Вопросы психологии, 2001, №6, с. 80-89.
13. Лоули Д., Максвелл А. *Факторный анализ как статистический метод*. – М.: Мир, 1967.
14. Малых С. Б., Егорова М. С., Мешкова Т. А. *Основы психогенетики*. – М.: Эпидавр, 1998.
15. Марпл-мл. С. Л. *Цифровой спектральный анализ и его приложения*. – М.: Мир: 1990.
16. *Нейронные сети STATISTICA*. – Руководство, StatSoft RUSSIA, 1998.
17. *Нейронные сети: история развития теории* / Под ред. А.И.Галушкина, Я.З.Цыпкина. - М.: ИПРЖР, 2001.
18. Овчаров Л. А. *Прикладные задачи теории массового обслуживания*. – М.: Машиностроение, 1969.
19. Уоссермен Ф. *Нейрокомпьютерная техника*. - М.: Мир, 1992.
20. Anderson T. W. *An introduction to multivariate statistical analysis*. – Wiley, 1958.
21. Bishop C. *Neural networks for pattern recognition*. - Oxford: University Press, 1995.
22. Bishop, Y. M. M., Fienberg, S. E., Holland, P. W. *Discrete multivariate analysis: Theory and practice*. - Cambridge, MA: M. I. T. Press: 1975.
23. Bollen K. A. *Structural equations with latent variables*. - John Wiley: New York, 1989.
24. Boomsma D. I., Martin N. G., Molenaar P. C. M. *Factor and simplex models for repeated measures: Application to two psychomotor measures of alcohol sensitivity in twins*. Behavior Genetics, 1989, 19, pp 79-96.
25. Brousset C., Baudrillard G. *Neural network for automating diagnosis in aircraft inspection*. - Review of Progress in Quantitative Nondestructive Evaluation / Ed. By D. O. Thompson and D. E. Chimenti, Plenum Press, New York, 1993, 12, pp 797-802.
26. Carling A. *Introducing neural networks*. - Wilmslow, UK: Sigma Press, 1992.
27. Dolan C. V., Molenaar P. C. M., Boomsma D. I. *Longitudinal genetic analysis of longitudinal means and covariance structure in the simplex model using LISREL*. Behavior Genetics, 1991, 21, pp 49-61.
28. Eaves L. J., Eysenck H. J., Martin N. G. *Genes, culture and personality: An empirical approach*. Oxford University Press: London, 1989.
29. Fausett L. *Fundamentals of neural networks*. - New York: Prentice Hall, 1994.
30. Fisher R. A. *The conditions under which χ^2 measures the discrepancy between observation and hypotheses*. Journal of the Royal Statistical Society, 1924, 87, pp 442-453.
31. Grossberg, S. *Competitive learning: from interactive activation to adaptive resonance*. – Cognitive Science, 1987, No 11, pp 23-63.

32. Guttman L. *A new approach to factor analysis: The radix*. – In: P. F. Lazarsfeld (Ed.), *Mathematical thinking in the social sciences*. Free Press: Glencoe, 1954, pp 258-349.
33. Haykin S. *Neural networks: a comprehensive foundation*. - New York: Macmillan Publishing, 1994.
34. Jöreskog K. G. *Estimation and testing of simplex models*. *British Journal of Mathematical and Statistical Psychology*, 1970, 23, pp 121-145.
35. Jöreskog K. G. *Factor analysis by least squares and maximum-likelihood method*. - In: K. Enslein, Ralston A, Wilf HS (ed) *Statistical methods for digital computers*. New York: John Wiley, 1977, pp 125-153.
36. Kohonen T. *Improved versions of learning vector quantization*. – In: Proc. International Joint Conference on Neural Networks, 1, San Diego, USA, 1990.
37. Kohonen T. *Self-organized formation of topologically correct feature maps*. - *Biological Cybernetics*, 1982, 43, pp 59-69.
38. Kohonen, T. *Self-organizing maps*. – Heidelberg: Springer Verlag, 1995.
39. Kramer M. A. *Nonlinear principal components analysis using autoassociative neural networks*. – *AIChe Journal*, 1991, 37, No. 2, pp 233-243.
40. Kroese, B. *An introduction to neural networks*. – Amsterdam: University of Amsterdam, 1996.
41. Kuravsky L. S., Baranov S. N. *Application of self-organizing feature maps for diagnostics of vibroacoustic systems*. – In: Proc. Condition Monitoring 2001, Oxford, United Kingdom, June 2001.
42. Kuravsky L. S., Malykh S. B. *On the application of queuing theory to analysis of twin data*. - *Twin Research*, 2000, 3, pp 92-98.
43. Loehlin J. C. *Latent variable models: an introduction to factor, path, and structural analysis*. - Hillsdale, NJ: Erlbaum, 1987.
44. Martin N, Eaves L. *The genetical analysis of covariance structures*. -*Heredity* 1977, 38, pp 79-95.
45. Minsky M. L., Papert S. A. *Perceptrons*. - Cambridge, MA: MIT Press, 1969.
46. Morrison D. F. *Multivariate statistical methods* (2nd ed.). – McGraw-Hill, 1976.
47. Neale M. C., Cardon L. R. *Methodology for genetic studies of twins and families*. - Kluwer Academic Publishers: Dordrecht, the Netherlands, 1992.
48. Neale M. C., Miller M. B. *The use of likelihood-based confidence intervals in genetic models*. - *Behavior Genetics*, 1997, 27, pp 113-120.
49. Neyman J., Pearson E. S. *On the use and interpretation of certain test criterion for purposes of statistical inference*. – *Biometrika*, 1928, 20A, pp 175,263.
50. Patterson D. *Artificial neural networks*. – Singapore: Prentice Hall, 1996.
51. Pidaparti R. M. V., Palakal M. J. *Neural network approach to fatigue-crack-growth predictions under aircraft spectrum loadings*. - *Journal of Aircraft*, 1995, 32, No 4, pp 825-831.
52. Speckt D. F. *A generalized regression neural network*. – *IEEE Transactions on Neural Networks*, 1991, 2, pp 568-576.
53. Speckt D. F. *Probabilistic neural networks*. – *Neural networks*, 1990, 3, pp 109-118.

ЛИТЕРАТУРА К РАЗДЕЛУ 1.5

1. C. Brousset and G. Baudrillard. *Neural network for automating diagnosis in aircraft inspection*. - Review of Progress in Quantitative Nondestructive Evaluation / Ed. By D. O. Thompson and D. E. Chimenti, Plenum Press, New York, 1993, vol. 12, pp. 797-802.
2. R. M. V. Pidaparti and M. J. Palakal. *Neural network approach to fatigue-crack-growth predictions under aircraft spectrum loadings*. - Journal of Aircraft, 1995, vol. 32, No. 4, pp. 825-831.
3. Kohonen T. *Improved versions of learning vector quantization*. – In Proc. International Joint Conference on Neural Networks, vol. 1, San Diego, USA, 1990.
4. Kohonen T. *Self-organized formation of topologically correct feature maps*. - Biological Cybernetics, 1982, vol. 43, pp. 59-69.
5. Галушкин А. И. *Теория нейронных сетей*. – М.: ИПРЖР, 2000.
6. Лоули Д., Максвелл А. *Факторный анализ как статистический метод*. – М.: Мир, 1967.
7. Kramer M. A. *Nonlinear principal components analysis using autoassociative neural networks*. – AIChE Journal, 1991, vol. 37, No. 2, pp. 233-243.
8. Овчаров Л. А. *Прикладные задачи теории массового обслуживания*. – М.: Машиностроение, 1969.
9. Крамер Г. *Математические методы статистики*. – М.: Мир, 1976.
10. *Нейронные сети STATISTICA*. – Руководство, StatSoft RUSSIA, 1998.
11. Loehlin J. C. *Latent variable models: an introduction to factor, path, and structural analysis*. - Hillsdale, NJ: Erlbaum, 1987.
12. Baranov S.N. and Kuravsky L.S. *Acoustic vibrations: modeling, optimization and diagnostics*. - 2nd Edition, enlarged. – Moscow: RUSAVIA, 2006. – 224 pp.

РАЗДЕЛ 2. СИНТЕЗ И ИДЕНТИФИКАЦИЯ СКРЫТЫХ МАРКОВСКИХ МОДЕЛЕЙ С ДИСКРЕТНЫМ И НЕПРЕРЫВНЫМ ВРЕМЕНЕМ

Рассматриваются методы синтеза и идентификации скрытых марковских моделей, предназначенных для диагностики систем с дискретным и непрерывным временем. Модель первого приближения формируется с помощью многомерного статистического анализа наблюдаемых данных или их обработки посредством самоорганизующихся карт Кохонена. Затем эта структура подвергается коррекции по определённым правилам. Для идентификации полученных моделей используются гистограммы наблюдаемых частот пребывания в различных состояниях системы после заданных периодов эксплуатации. Синтез выполняется при наличии неопределённостей, включая отсутствие полной информации о состояниях системы и связях между ними. Неидентифицированные наблюдения частично определяются методом распространения классификации с помощью самоорганизующихся карт Кохонена или кластерного анализа. Связи между различными состояниями определяются в соответствии со смежностью или их кластеров, или приписанных состояниям областей выигрывающих элементов топологических карт Кохонена, опираясь на статистические критерии согласия. С целью повышения надёжности, для моделей с дискретным временем (цепей Маркова) выполняется переход к обучаемым структурам с непрерывным временем (сетям Маркова), с последующим возвратом в дискретный масштаб времени и идентификацией вероятностей переходов между состояниями. Представленные методы полезны для специалистов, отвечающих за эксплуатацию и обслуживание технических систем.

2.1. ПРИМЕР ТЕХНИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ, РЕШАЕМОЙ С ПОМОЩЬЮ СКРЫТЫХ МАРКОВСКИХ МОДЕЛЕЙ

Высокие уровни нагрузок в акустическом диапазоне частот являются причиной усталостных повреждений элементов авиационных конструкций и выхода из строя бортовой аппаратуры. Исследованиям в этой области стало уделяться большое внимание, начиная с середины 50-х годов, что было связано с массовым характером усталостных повреждений авиационных конструкций от акустических нагрузок, обусловленным ростом скоростей полета и переходом от поршневых к турбореактивным и турбовинтовым двигателям. В последнее время интерес к этой проблеме вновь усилился в связи с разработкой нового поколения сверхзвуковых пассажирских самолетов и гиперзвуковых летательных аппаратов.

Наибольшее влияние акустические нагрузки оказывают на тонкостенные элементы конструкции летательного аппарата. Их основные источники – это пульсации давления в турбулентном пограничном слое, шум

струй двигателей, шум винтов и пульсации давления при бафтинге. Нагрузки носят случайный характер, их уровни в разных точках поверхности летательного аппарата могут составлять 145-170 дБ, при широком частотном диапазоне (до 5000 Гц).

На практике оценка степени разрушения конструкций рассматриваемого типа может проводиться по изменениям распределенной жесткости, распознаваемой, в свою очередь, по качественным изменениям нормированных спектральных характеристик параметров, измеряемых тензодатчиками или акселерометрами в контрольных точках. Нормировка позволяет анализировать только качественную форму реакции конструкции, не учитывая уровень нагрузки.

Такой подход, основанный на оценке усредненных свойств конструкции, представляется более перспективным, чем поиск отдельных трещин [6, 15], которые не всегда могут наблюдаться непосредственно и, имея большой разброс в динамике своего развития, труднопрогнозируемы. Использование в качестве контрольных параметров вторичных характеристик (спектров), а не исходных временных реализаций обусловлено тем, что

- они представительны, сохраняя достаточно много полезной информации об исследуемом процессе,
- требуют гораздо меньше памяти при цифровой форме представления,
- при современном уровне технологии легко и быстро вычисляются с контролируемой точностью.

Диагностика и прогнозирование срока службы являются двумя важнейшими техническими задачами, решаемыми в процессе мониторинга технического состояния авиационных конструкций, накапливающих усталостные повреждения. Их решение необходимо как для планирования технического обслуживания, так и для оценки степени разрушения. Полученные результаты дают возможность снизить временные и материальные затраты на эксплуатацию летательных аппаратов, повысить надежность контроля за разрушением элементов конструкций и упростить регламентные работы. Технология мониторинга усталостных повреждений, опирающаяся на возможности нейронных²² и дискриминантных сетей, была рассмотрена в работах [1, 9, 10, 18, 19, 20].

Как показано в монографии [5], для рассматриваемого класса задач вероятностные модели накопления повреждений имеют преимущества при прогнозировании по сравнению с детерминированными моделями. Соответствующие методы, опирающиеся на теорию марковских процессов, представлены в работах [1, 9, 10, 12, 19, 20]. Согласно данному подходу, прогнозирование проводится на базе накопленных наблюдений с использованием параметрических математических моделей, описывающихся марковскими случайными процессами с дискретными состояниями и

²² Были использованы традиционные нейронные сети с управляемым процессом обучения (перцептроны и др.), а также самоорганизующиеся карты признаков Кохонена.

непрерывным временем. Заданные типы повреждений рассматриваются как отдельные состояния, в которых исследуемая конструкция может находиться с некоторой вероятностью, переходя из одного состояния в другое по определенным правилам.

Предполагается, что для переходов между состояниями выполняются свойства пуассоновских потоков событий. Динамика изменения во времени вероятностей пребывания в различных состояниях описывается системой обыкновенных дифференциальных уравнений Колмогорова.

Интенсивности потоков событий являются свободными параметрами модели. Их значения идентифицируются путем сравнения наблюдаемых и прогнозируемых гистограмм, описывающих распределения частот появления неисправностей, а именно: вычисляются значения, обеспечивающие наилучшее соответствие наблюдаемых и прогнозируемых частот попадания в исследуемые состояния системы в контрольные моменты времени согласно заданному критерию. Используемая процедура идентификации и её программная реализация представлены в работах [1, 20]. Следует отметить, что при этом решается обратная задача: коэффициенты дифференциальных уравнений определяются по заданным характеристикам решения. Полученные значения свободных параметров рассматриваются как характеристики усталостного разрушения, выявленные в результате наблюдений.

Показано, что при рассмотренной постановке обратной задачи, марковские модели фактически выступают в роли одной из разновидностей *нейронных сетей*. Для вычисления оптимальной структуры этих сетей разработаны специальные методы синтеза, опирающиеся на статистические критерии согласия [1, 11, 20]. В работах [10, 12] была предложена концепция *многофакторных сетей Маркова*, которая, развивая данный подход, позволила моделировать тонкие особенности накопления усталостных повреждений и улучшить соответствие между прогнозируемым поведением конструкции и результатами наблюдений. Указанные работы представляют новые возможности этих обучаемых структур, содержат примеры их практического применения, включая случай трёхмерных моделей, а также показывают преимущества новых методов при диагностике повреждений. Рассматриваемые марковские модели позволяют не только оценивать вероятности появления повреждений различных типов, но и идентифицировать их по наблюдаемым характеристикам исследуемой системы. Это позволяет эффективно использовать разработанные методы моделирования и идентификации для решения типовых задач диагностического контроля состояния технических систем.

Учитывая невозможность прямого наблюдения состояний системы, *сети Маркова* при заданной постановке задачи могут рассматриваться как один из вариантов *скрытых марковских моделей* с непрерывным временем, которые используют оценки спектральных характеристик в контрольных точках конструкции в качестве наблюдаемых параметров. Очевидно, что эти

сети являются более тонким и сложным инструментом решения практических задач, чем традиционные модели с дискретным временем.

Диагностика рассматриваемых технических систем выполняется в условиях неопределённости, когда заранее неизвестны ни возможные типы повреждений, ни связи между ними. Информация о структуре повреждений таких систем отсутствует в силу следующих причин:

- ряд повреждений не может быть легко и быстро идентифицирован (в частности, из-за затруднённого доступа к отдельным частям конструкции или сложностей, возникающих при обнаружении трещин малого размера);
- повреждения часто не обнаруживаются непосредственно, и судить об их наличии можно, как правило, только по косвенным характеристикам, доступным для измерений и оценок (например, по спектрам напряжений в контрольных точках);
- часто отсутствуют критерии для различения типов повреждений;
- экспериментальное исследование взаимных связей между различными типами повреждений, как правило, является трудоёмким и длительным процессом.

При диагностике указанных систем с неопределённостями, представленных рассмотренными выше вероятностными моделями, обычно решаются две основные задачи:

- по марковской модели с заданными параметрами, состояния которой представляют различные типы повреждений, и последовательности наблюдаемых спектральных характеристик в контрольных точках конструкции определить наиболее вероятную последовательность повреждений (задача идентификации);
- по выборке наблюдаемых спектральных характеристик в контрольных точках конструкции определить наиболее вероятную марковскую модель, представляющую повреждения конструкции и структуру связей между ними, включая множество состояний, соответствующих различным типам повреждений, возможные переходы между ними и их количественные характеристики (задача синтеза).

Соответственно, можно говорить о задаче построения при наличии неопределённостей скрытой марковской модели, наилучшим образом согласующейся с наблюдениями. В этой работе представлены новые статистические методы синтеза и идентификации скрытых марковских моделей с дискретным и непрерывным временем.

При решении задачи синтеза вычисляются: множество релевантных состояний, их связи и оптимальные значения свободных параметров марковской модели. Некоторые элементы данного подхода опубликованы в статьях [10-11, 13, 21-22] и монографиях [1, 20]. Если модели с дискретным временем (*цепи Маркова*) лучше подходят для решения прикладной задачи (например, при получении наблюдаемых спектральных характеристик с фиксированным временным шагом), с помощью специальной процедуры

выполняется переход от исходной модели с непрерывным временем к соответствующей модели с дискретным временем.

Благодаря гибкости и универсальности рассмотренный способ решения имеет очевидные преимущества перед этими методами, использовавшимися ранее при построении оценок максимального правдоподобия для параметров традиционных скрытых марковских моделей в форме цепей Маркова, включая алгоритмы *Баума-Велша* и *Болди-Човина* [2, 16]. Следует заметить, что предлагаемый подход вычисляет не только оптимальные значения свободных параметров, как эти и другие алгоритмы, но и множество релевантных состояний модели и связи между ними. Существенно, что традиционные алгоритмы, использовавшиеся для скрытых марковских моделей, не позволяют решить прикладную техническую задачу, разобранную в данной статье, при наличии неопределённостей, связанных с типами повреждений конструкции, выбором состояний модели и структуры их связей, а также при небольшом числе контрольных моментов наблюдений.

Решение задачи идентификации требует определения наиболее правдоподобной последовательности повреждений, используя вероятности появления наблюдаемых спектров при пребывании модели в различных её состояниях. В случае цепей Маркова результат может быть получен с помощью алгоритма Витерби [17], однако, учитывая относительно малое число состояний в рабочих моделях, при поиске решения как для моделей с дискретным, так и с непрерывным временем допустимо применение алгоритмов полного перебора.

Область применения разработанных методов далеко выходит за рамки той прикладной задачи, которая рассмотрена в качестве иллюстрации в этой работе, позволяя использовать предложенный аппарат для решения многочисленных технических и нетехнических задач. В частности, учитывая преимущества моделей с непрерывным временем при решении задачи синтеза, определённые перспективы имеет преобразование моделей с дискретным временем в модели с непрерывным временем с их последующим синтезом и идентификацией и возвращением к исходной структуре.

2.2. ТЕХНОЛОГИЯ РЕШЕНИЯ

2.2.1. Синтез

Решение задачи синтеза включает в себя следующие этапы:

- 1) понижение размерности входных данных с целью устранения избыточной информации;
- 2) определение множества состояний сети Маркова посредством классификации с помощью самоорганизующихся карт признаков Кохонена (карт Кохонена) или процедуры многомерной кластеризации;

- 3) вычисление начального распределения связей между состояниями сети Маркова по смежности активизируемых участков карты Кохонена или по оценкам расстояний, полученным в результате многомерного шкалирования;
- 4) уточнение структуры связей (удаление избыточных, косвенных и статистически незначимых связей) посредством последовательной идентификации интенсивностей переходов между состояниями методом минимума хи-квадрат;
- 5) окончательная идентификация параметров сети методом минимума хи-квадрат.

2.2.1.1. Входные данные

Как показано в работе [19], степень усталостного разрушения акустически нагруженных конструкций удобно оценивать по спектральным характеристикам параметров, измеряемых в контрольных точках. Эти спектры рассматриваются далее в качестве исходных анализируемых характеристик. Предполагается, что имеется достаточно представительная выборка спектров, полученных в результате испытаний конструкции или наблюдений за ней в процессе эксплуатации, причем только для некоторых из этих спектров известен тип повреждения, которому они соответствуют. Спектральные плотности наблюдаемых параметров следует вычислять с точностью, достаточной для надёжного распознавания повреждений²³.

2.2.1.2. Понижение размерности входных данных: 1-й этап синтеза

В случае представления наблюдаемых данных спектральными характеристиками, измеренными в контрольных точках конструкции, целесообразно использовать в качестве входных переменных частотные диапазоны, а в качестве наблюдений – значения нормированных спектральных плотностей в центрах этих диапазонов. При этом каждое наблюдение представляет собой отдельную спектральную плотность. Нормировка позволяет анализировать только качественную форму реакции конструкции, не учитывая уровень нагрузки.

Большое число входных переменных является типичным для данного способа представления, что может усложнить анализ входной выборки, увеличивая, в частности, до неприемлемых размеров объём наблюдений, необходимых для качественного синтеза сети. Решение проблемы путём ухудшения разрешающей способности спектров неприемлемо, поскольку при этом теряется полезная информация. Качество анализа можно улучшить, только понизив размерность входных данных за счет устранения избыточной или малозначимой информации.

Способы решения этой задачи рассмотрены в статье [19] и книгах [1, 20]. Среди допустимых вариантов наиболее удобен метод главных

²³ Оценки точности цифрового спектрального анализа приведены, например, в книгах [3, 14].

компонентов [23], как самый простой и не требующий принятия специальных предположений об исходных данных. Понижение размерности позволяет сделать результаты анализа независимыми от особенностей оценки спектральных характеристик.

2.2.1.3. Определение множества состояний сети Маркова: 2-й этап синтеза

Множество состояний сети Маркова определяется классификацией типов повреждений: каждому типу соответствует свое состояние. Так как повреждения для элементов входных данных полагаются известными лишь частично, необходимо распространить заданную классификацию на спектры, для которых повреждения не определены.

Для определения множества состояний предлагается использовать одно из двух альтернативных средств: карты Кохонена или кластеризацию.

Метод распространения классификации на базе карт Кохонена реализует неуправляемое обучение и включает следующие шаги:

- 1) выбрать карту Кохонена [8], число элементов которой значительно превышает предполагаемое число типов повреждений;
- 2) обучить эту карту на выборке входных примеров, для которых известны повреждения, пометив нейроны топологической карты, выигрывавшие только на одном типе повреждений (метки соответствуют типам повреждений);
- 3) подать на вход карты оставшуюся часть выборки, приписав входным примерам, на которых выигрывают помеченные нейроны, указанные метками повреждения;
- 4) если множество входных примеров, для которых известны повреждения, расширилось, то перейти к шагу 2, иначе завершить вычисления.

Если в выборке входных примеров остаются элементы, для которых неизвестны повреждения, то возможны следующие варианты действий:

- предусмотреть в сети Маркова специальное состояние **Unknown** для неизвестных повреждений и отнести неклассифицированные элементы к этому типу (см. раздел 2.3);
- провести осмотр конструкции и классифицировать оставшиеся элементы выборки (если их число невелико).

Процедуру кластеризации целесообразно составить из четырёх компонентов:

- 1) древовидной кластеризации с целью получить иерархическую дендрограмму и оценить приемлемое число кластеров, которые используются в дальнейшем для формирования состояний сети Маркова²⁴ (в случае входных данных рассматриваемого типа рекомендуется метод Ворда с евклидовой метрикой);

²⁴ Это число кластеров рекомендуется определять по числу пересечений ветвей иерархической дендрограммы, выполняя сечение в границах одного из наибольших интервалов расстояний,

- 2) кластеризации *методом K-средних* при числе кластеров, определённом на предыдущем шаге, для выявления содержимого каждого кластера;
- 3) назначение кластерам меток в соответствии с преобладающим типом повреждений среди помеченных элементов каждого кластера;
- 4) объединение кластеров с идентичными метками (необязательно).

2.2.1.4. Определение начального распределения связей между состояниями сети Маркова: 3-й этап синтеза

Для определения начального распределения связей между состояниями сети Маркова используются либо ассоциативные свойства карт Кохонена, обусловленные тем, что похожие наблюдения активируют группы близко лежащих нейронов, либо анализ результатов многомерного шкалирования.

В первом случае связи между состояниями прогнозируются по смежности активизируемых участков на помеченной топологической карте. Каждый из указанных участков соответствует определенному типу повреждений (рис. 2.4).

Формальное правило для установления смежности может быть выбрано неоднозначно. Один из удобных способов связан с подсчетом наименьших расстояний между парами помеченных нейронов в *манхэттенской метрике*. Базой для сравнения при этом служит наименьшее расстояние между двумя по-разному помеченными нейронами:

$$M = \min_{L(\alpha) \neq L(\beta)} (|i_\alpha - i_\beta| + |j_\alpha - j_\beta|),$$

где $L(\alpha)$ и $L(\beta)$ - метки нейронов с индексами α и β ; индексы α и β принимают все значения, удовлетворяющие указанному условию; i_α и i_β - номера строк, в которых на топологической карте расположены нейроны с индексами α и β ; j_α и j_β - соответствующие номера столбцов. Смежными полагаются те и только те пары состояний p и q , для которых

$$\min_{\substack{L(\alpha)=p \\ L(\beta)=q}} (|i_\alpha - i_\beta| + |j_\alpha - j_\beta|) \leq M + k,$$

где индексы α и β принимают все значения, удовлетворяющие указанным условиям; $k \geq 0$ - целочисленный параметр задачи (в стандартных ситуациях можно полагать, что $k=0$).

Объектом анализа при многомерном шкалировании является матрица евклидовых расстояний между центрами кластеров, которые соответствуют различным типам повреждений, выявленным на предыдущем шаге. В результате анализа эти центры обычно размещаются в двух- или трёхмерном пространстве. Возможности переходов между состояниями модели определяются расстояниями между ними. Таким образом, принимается

внутри которых не происходят слияния элементов и кластеров. Выбор подходящего интервала обусловлен наличием преобладания в каждом кластере меток определённого типа и априорными предположениями о числе состояний сети.

гипотеза о зависимости возможности таких переходов от соответствующих расстояний в пространстве шкалирования.

При формировании начального распределения связей соединяются те пары состояний, у которых центры находятся на минимальном расстоянии друг от друга или превышают его не более чем на заданный процент (на практике рекомендуется 50%-й порог). Центр кластера, соответствующего нормальному поведению системы, представляет начальное состояние. Направления переходов между состояниями определяются в соответствии с близостью к начальному состоянию, а именно: переход от одного состояния к другому возможен, если они соединены и минимальное число переходов от начального состояния к первому меньше аналогичного числа переходов ко второму. Если направление не определяется однозначно, то для соответствующей связи первоначально допускаются оба варианта переходов. Структура, полученная в результате любой из описанных выше процедур, как правило, учитывает косвенные и статистически незначимые связи, которые выявляются и удаляются на последующем этапе вычислений.

2.2.1.5. Уточнение структуры связей: 4-й этап синтеза

Свободные параметры при обучении сети подбираются таким образом, чтобы обеспечить наилучшее соответствие наблюдаемых и прогнозируемых гистограмм нахождения в состояниях системы в заданные моменты времени. В качестве меры соответствия используется *статистика Пирсона*

$$\sum_{k=0}^n \frac{(F_k - p_k N)^2}{p_k N},$$

где F_k – наблюдаемая частота попадания в k -е состояние системы в заданный момент времени, $p_k N$ – соответствующая прогнозируемая частота, p_k – прогнозируемая вероятность нахождения в k -м состоянии, N – число элементов в выборке, $n+1$ – число состояний модели (пронумерованных с нуля). Чем меньше значение этой статистики, тем лучше соответствие между наблюдаемыми и прогнозируемыми данными. Прогнозируемые вероятности нахождения в состояниях вычисляются путём численного интегрирования систем дифференциальных уравнений Колмогорова [20].

Данный способ идентификации свободных параметров называется методом минимума хи-квадрат. Для задач рассматриваемого типа он даёт оценки, близкие к полученным методом максимального правдоподобия [7]. Доказано, что при выполнении ряда общих условий значения статистики Пирсона, получаемые при подстановке решений, асимптотически описываются распределением хи-квадрат с $n-s-1$ степенями свободы, где s – число определяемых параметров, причем вычисленные значения свободных параметров при увеличении объема выборки сходятся по вероятности к искомому решению [7]. Это позволяет использовать приведенную статистику для проверки гипотезы о том, что прогноз, полученный с помощью сетей Маркова, согласуется с результатами наблюдений.

Процедура нахождения оптимальных значений свободных параметров, опирающаяся на возможности электронных таблиц, рассмотрена в работах [1, 19, 20]. Там же было показано, как оптимизировать модель, используя статистические критерии согласия.

Уточнение структуры связей в сети Маркова, а именно: удаление косвенных и статистически незначимых связей – проводится на основе того же подхода. Сеть, в которой все интенсивности потоков событий являются свободными параметрами, будем называть полной, а сети, в которых на свободные параметры налагаются те или иные условия (например, условия равенства нулю), – упрощенными. Гипотезу о том, что прогноз, полученный с помощью полной сети Маркова, согласуется с результатами наблюдений, будем обозначать как H_c .

Если отвергать гипотезу H_c нет оснований, то проводится поочередное выявление степени значимости каждой связи в сети. Для этого свободные параметры оцениваются методом минимума хи-квадрат при условии, что интенсивность потока, соответствующая исследуемой связи, равна нулю. Полученное значение статистики Пирсона X_r^2 сравнивается с аналогичной характеристикой X_c^2 для полной сети. Поскольку разность $X_r^2 - X_c^2$ асимптотически распределена как хи-квадрат с одной степенью свободы [4], эта статистика используется для проверки нулевой гипотезы H_r о том, что упрощенная модель согласуется с результатами наблюдений, против альтернативной гипотезы H_c . Если гипотеза H_r не отвергается при заданном уровне значимости, то соответствующая связь помечается как кандидат на удаление из сети.

Целесообразно проводить уточнение модели в несколько итераций, используя достаточно большое значение для уровня значимости, при котором принимается решение об удалении связи (рекомендуется значение $p=0,5$), и малое значение для уровня значимости, при котором связь сохраняется в сети (рекомендуется значение $p=0,01$). Результат, полученный после удаления связей на текущем этапе вычислений, рассматривается как полная сеть на следующей итерации. При таком подходе во время каждой итерации из сети удаляются только заведомо «лишние» связи ($p > 0,5$), а решение по поводу «спорных» связей ($0,01 \leq p \leq 0,5$) откладывается на будущее. Значимость «спорных» связей, как правило, проясняется с каждым шагом, что обусловлено упрощением исследуемой модели.

2.2.1.6. Окончательная идентификация параметров сети: 5-й этап синтеза

На данном этапе, используя метод минимума хи-квадрат, проводится идентификация свободных параметров полученной сети. Качество соответствия прогноза наблюдениям оценивается по наименьшему значению статистики Пирсона. Число степеней свободы при использовании критерия согласия хи-квадрат определяется как разность между числом независимых наблюдаемых статистик F_k и числом определяемых параметров.

2.2.2. Идентификация

Число моментов времени q , в которых оцениваются спектральные характеристики контрольных точек конструкции, должно быть установлено заранее. Процедура идентификации состоит из следующих шагов:

- 1) определение всех последовательностей состояний модели $S_i = \{s_{i1}, \dots, s_{iq}\}$, $i=1, \dots, r$, которые могут возникать при работе исследуемой системы в заданные моменты времени;
- 2) оценка вероятностей $P(S_i)$ появления для каждой последовательности S_i , $i=1, \dots, r$, выявленной на предыдущем шаге, путём вычисления произведений вероятностей переходов между состояниями модели в течение интервалов, ограниченных установленными контрольными

моментами времени, а именно: $P(S_i) = \prod_{u=1}^{q-1} p_{s_i, u, u+1}$, где $p_{s_i, u, u+1}$ –

вероятность перехода из состояния s_{iu} , в котором система пребывала в момент времени u , в состояние $s_{i, u+1}$, занятого в момент $u+1$. Указанные вероятности переходов могут вычисляться с помощью цепей или сетей Маркова²⁵;

- 3) оценка вероятностей P_{iz} появления наблюдаемой последовательности $Z = \{z_1, \dots, z_q\}$ спектральных характеристик в контрольных точках конструкции для последовательностей состояний S_i , $i=1, \dots, r$, а именно:

$P_{iz} = P(S_i) \prod_{j=1}^q p_{z_i, j}$, где $p_{z_i, j}$ – вероятность получения наблюдаемой характеристики z_j , находясь в состоянии s_{ij} ²⁶;

- 4) выбор наиболее вероятной последовательности состояний $S_{max} \in \{S_i\}_{i=1, \dots, r}$, соответствующей наибольшей вероятности $P_{z, max} = \max_i \{P_{iz}\}_{i=1, \dots, r}$.

Если исследователь располагает выборочными оценками параметров распределений для расстояний наблюдений, соответствующих каждому из состояний модели, от центроидов этих состояний²⁷, построенных по накопленным данным, то целесообразно заменить величины $p_{z_i, j}$ функциями плотностей вероятностей $f_{i, j}(x_j)$ евклидовых расстояний x_j между

²⁵ В случае цепей Маркова эта вероятность равна вероятности перехода между указанными состояниями. В случае сетей Маркова данная характеристика определяется интегрированием системы дифференциальных уравнений Колмогорова, причём предшествующему состоянию в предыдущий момент времени приписывается вероятность, равная единице, а другим состояниям в тот же момент – нулевые вероятности.

²⁶ Чтобы исключить эффекты, связанные с влиянием избыточной информации, целесообразно вычислять расстояния x_j , понизив размерность входных данных (см. раздел 2.2.1.2).

²⁷ Эти распределения полагаются нормальными в соответствии с центральной предельной теоремой теории вероятностей и структурой выражений для вычисления евклидовых расстояний.

характеристиками z_j и центроидами наблюдений, соответствующими состояниям s_{ij} ²⁸. В этом случае именно расстояния определяют оценки вероятностей появления наблюдаемых характеристик.

Следует заметить, что идентифицировать цепи Маркова удобней, чем сети Маркова, поскольку для это требуются более простые вычисления. В свою очередь, синтез скрытых моделей легче проводить для сетей Маркова благодаря их большей гибкости, а также возможности получать решения в случае малого числа моментов наблюдений и наличия неопределённостей с состояниями модели на начальном этапе исследования.

2.2.3. Переходы от моделей с непрерывным временем к моделям с дискретным временем

Переходы от моделей с непрерывным временем к соответствующим моделям с дискретным временем, и наоборот, выполняются в том случае, если это целесообразно для решения прикладной задачи. Переход к моделям с непрерывным временем обеспечивается надлежащим отображением последовательности дискретных моментов времени цепи Маркова в непрерывную ось времени сети Маркова. В случае обратного перехода рекомендуется следующая процедура:

- 1) выбор интервала дискретизации τ для непрерывной оси времени, который соответствует временному шагу цепи Маркова;
- 2) интегрирование системы дифференциальных уравнений Колмогорова, описывающей динамику изменения вероятностей пребывания в состояниях исходной сети Маркова, с целью определения векторов распределения вероятностей цепи Маркова \mathbf{P}_i ($i=0, 1, \dots, I$), соответствующих заданной последовательности из $I+1$ дискретных моментов времени, взятых с выбранным интервалом дискретизации τ ;
- 3) построение матрицы вероятностей переходов $\mathbf{A}=\|a_{ij}\|$ порядка $n \times n$, где n есть число состояний рассматриваемой цепи Маркова, которая представляет динамику поведения данной цепи и выражается с помощью свободных переменных, обозначающих вероятности переходов, и, если необходимо, аналитических выражений, составленных из этих переменных;
- 4) численное решение многомерной задачи оптимизации с критерием наименьших квадратов $\sum_{i=0}^{I-1} (\mathbf{P}_{i+1} - \mathbf{A}\mathbf{P}_i)^T (\mathbf{P}_{i+1} - \mathbf{A}\mathbf{P}_i)$ при следующих ограничениях, налагаемых на искомые свободные переменные, через которые выражается матрица \mathbf{A} :
 - $0 \leq a_{ij} \leq 1$ для всех i, j
 - $\sum_{i=1}^n a_{ij} = 1$ для всех j .

²⁸ В случае нормального распределения расстояний для вычисления значений указанных функций плотности вероятности используются положительные аргументы.

Вычисленные значения свободных переменных определяют искомую матрицу вероятностей переходов A , которая задаёт динамику распределения вероятностной пребывания в состояниях цепи Маркова: $P_{i+1} = AP_i$, $i=0, 1, \dots, L$. Статистическую значимость невязки данного уравнения можно оценить, модифицировав статистику Пирсона, приведённую в разделе 2.2.1.5.

2.3. ПРИМЕР РЕШЕНИЯ

Особенности предложенного подхода демонстрируются далее на примере синтеза и идентификации марковских моделей процесса усталостного разрушения панели воздухозаборника маневренного самолета. Характеристики этой панели и типы её повреждений представлены в работах [1, 9].

Результаты наблюдений представляли собой выборку из 144 пар спектральных плотностей напряжений, измеренных в двух контрольных точках в диапазоне от 500 до 2500 Гц, причем типы повреждений полагались заранее известными только для 25 пар. Характерные примеры этих спектров приведены на рис. 2.1. Спектры для контрольной выборки воздухозаборников определялись по истечении 1000 и 2000 часов эксплуатации. Были идентифицированы шесть типов повреждений. Каждое наблюдение содержало усредненные значения нормированных спектральных плотностей в 45 частотных диапазонах шириной в 45 Гц. Таким образом, исходный вариант анализируемых данных включал 90 входных переменных.

После понижения размерности задачи методом главных компонентов объем входных данных был уменьшен до 10 переменных, которые использовались в последующем анализе. (10 первых главных компонентов объясняли более 80% наблюдаемой дисперсии.)

Метод распространения классификации за 2 итерации позволил расширить идентифицированную часть выборки до 115 элементов. При этом использовалась карта Кохонена из 25 элементов²⁹ (рис. 2.2). Для 5 пар спектров типы повреждений были определены путем дополнительного осмотра. 24 пары спектров остались неклассифицированными.

²⁹ Для работы с картами Кохонена использовался пакет STATISTICA Neural Networks.

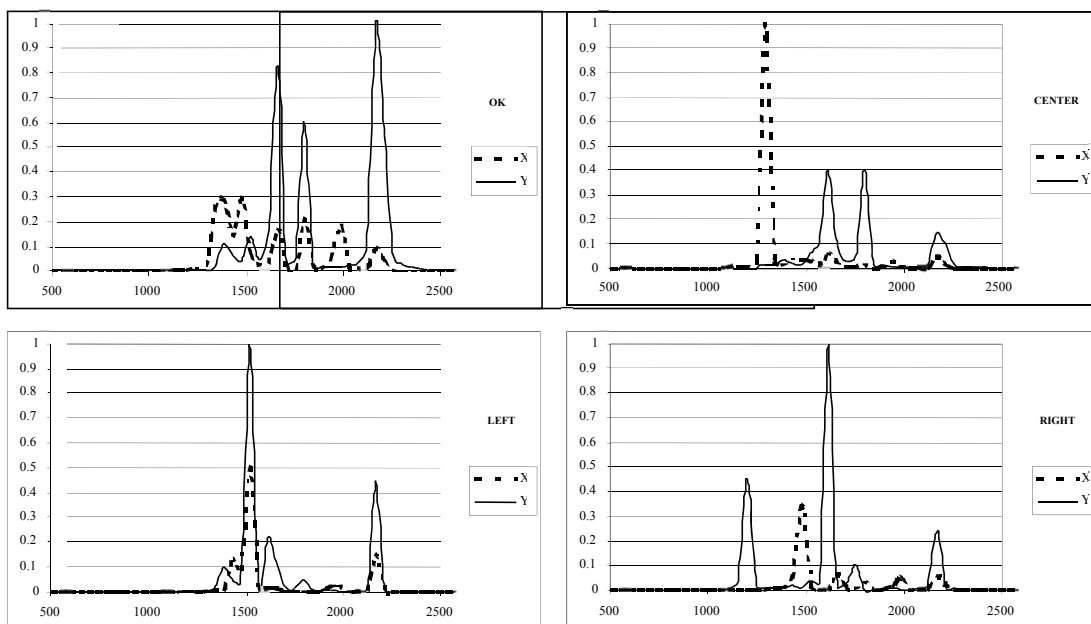


Рис. 2.1. Примеры нормированных спектров напряжений для распознаваемых состояний конструкции в контрольных точках X и Y.

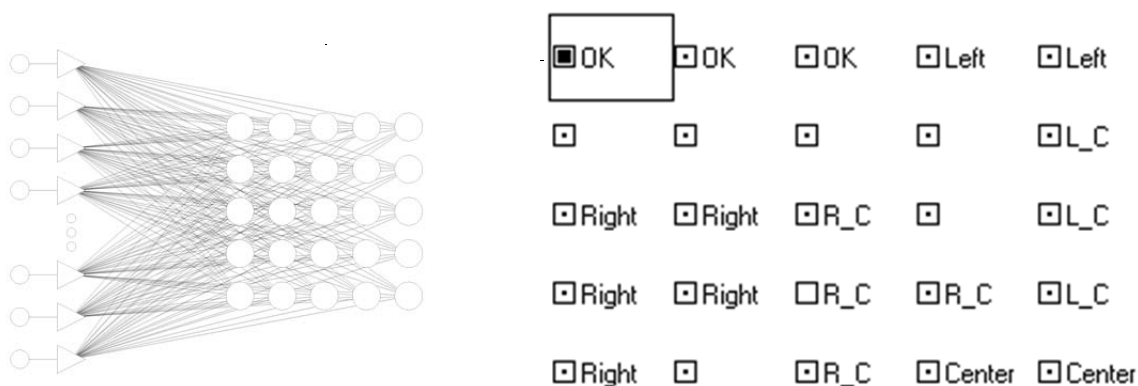


Рис. 2.2. Карта Кохонена (5×5 элементов), использованная для распространения классификации. Показаны общий вид и разметка топологической карты на последнем шаге алгоритма.

Показано, что в сети Маркова следует предусмотреть состояния **OK**, **Center**, **Left**, **Right**, **L_C (Left+Center)**, **R_C (Right+Center)**, соответствующие идентифицированным типам разрушения, и состояние **Unknown** для неизвестных повреждений [11, 20]. Для удобства интерпретации результатов, построение сети сначала проводится для шести распознаваемых состояний, к которым затем добавляется состояние **Unknown**.

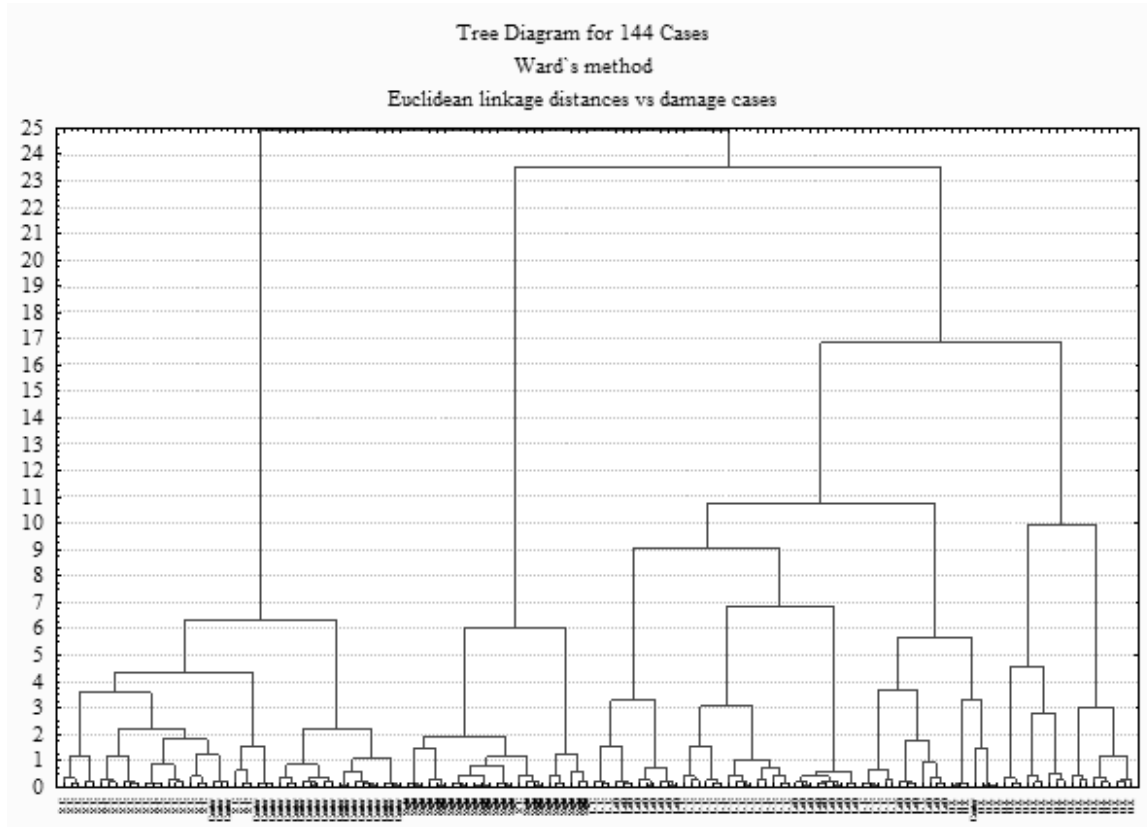


Рис. 2.3. Иерархическая дендрограмма, полученная после древовидной кластеризации с помощью метода Ворда в евклидовой метрике.

Процедура многомерной кластеризации привела к иерархической дендрограмме, представленной на рис. 2.3³⁰. В соответствии с рекомендациями раздела 2.2.1.3, начальная оценка числа кластеров, используемых для формирования состояний сети Маркова, строилась с помощью сечения дендрограммы на расстоянии, равном 5. После уточнения состава кластеров методом *K*-средних, назначения меток в соответствии с преобладающим типом повреждений и объединения кластеров с идентичными метками, были сформированы шесть кластеров, обозначенных как **OK**, **Center**, **Left**, **Right**, **L_C** и **R_C**. Небольшие несоответствия в распределениях классифицированных наблюдений по кластерам допустимы,

³⁰ Необходимые вычисления были выполнены с помощью пакета STATISTICA.

если они не вызывают качественных искажений в подборе состояний для сети Маркова и их взаимных связях.

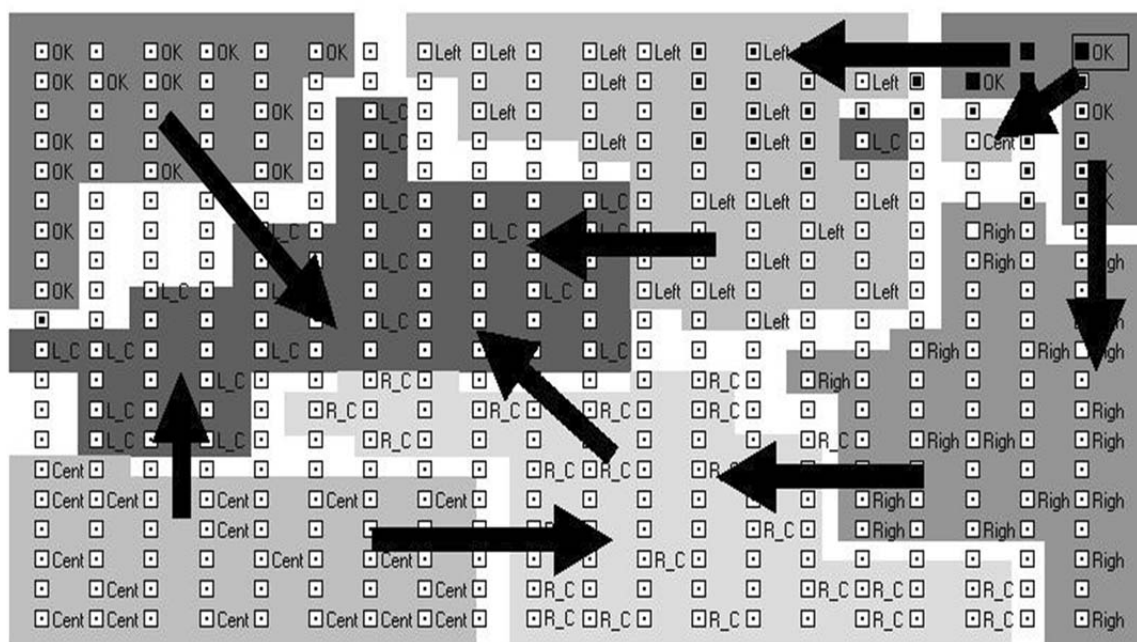


Рис. 2.4. Разметка топологической карты (20×20 элементов), использованной для определения структуры связей между состояниями сети Маркова. Выявленные связи указаны стрелками.

Структура связей между распознаваемыми состояниями сети Маркова определялась с помощью карты Кохонена из 400 элементов (рис. 2.4). Наименьшие расстояния между нейронами помеченных участков представлены в табл. 2.1.

Таблица 2.1. Наименьшие расстояния между нейронами помеченных участков топологической карты ($M=2$).

	OK	Center	Right	Left	R_C	L_C
<i>OK</i>	0	2	2	2	9	2
<i>Center</i>	2	0	3	4	2	2
Right	2	3	0	3	2	5
Left	2	4	3	0	3	2
R_C	9	2	2	3	0	2
L_C	2	2	5	2	2	0

Пары состояний, для которых наименьшее расстояние равно 2, полагаются смежными (параметр k равен нулю). Для того, чтобы установить направления переходов между смежными состояниями, учитываем, что состояние **OK** - исходное, а переходы из него в другие состояния необратимы, а также то, что простые разрушения (**Center**, **Right** и **Left**) предшествуют более сложным (**R_C** и **L_C**), в которые они входят в качестве

составляющих. В результате получаем сеть Маркова с избыточными связями, представленную на рис. 2.5.

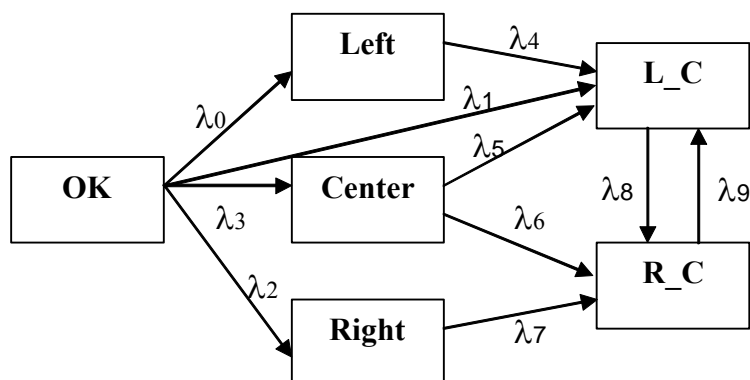


Рис. 2.5. Сеть Маркова с избыточными связями.

Учитывая близость активизируемых участков на топологической карте, в сети на данном этапе синтеза формально присутствуют связи между состояниями R_C и L_C, хотя ни одно из них не может рассматриваться как предшественник другого. Учет этих связей не влияет на конечный результат, поскольку в дальнейшем они будут устранены как избыточные.

Альтернативный способ выявления связей между состояниями построен на применении многомерного шкалирования. С его помощью была получена двумерная диаграмма, приведённая на рис. 2.6³¹. Стрелки представляют связи, определённые в соответствии с правилами раздела 2.2.1.4. Указанная структура связей в основных деталях согласуется с результатами, вычисленными с помощью карт Кохонена.

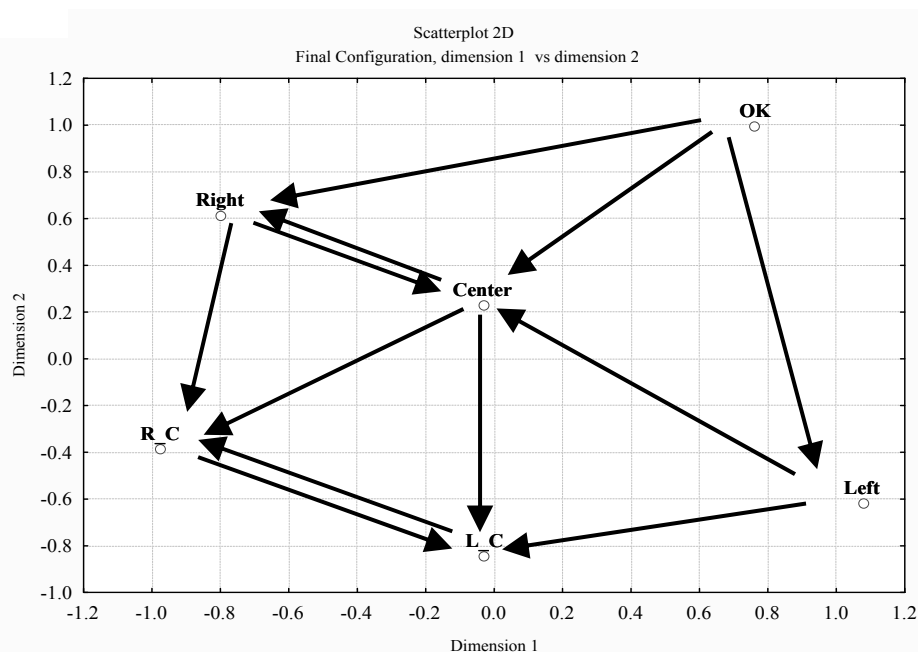


Рис. 2.6. Структура избыточных связей между состояниями, полученная в результате многомерного шкалирования.

³¹ Для расчётов использовался пакет STATISTICA.

Избыточные связи выявлялись путем сравнения значений статистики Пирсона, полученных методом минимума хи-квадрат для полной сети, показанной на рис. 2.5, и десяти упрощенных сетей. В каждой из упрощенных сетей один из параметров λ_i ($i=0,1,\dots,9$) полагался равным нулю, при уровне значимости, равном 0,5. Оценки, полученные на первой итерации уточнения сети, приведены в табл. 2.2.

Таблица 2.2. Статистические оценки, полученные на первой итерации уточнения сети Маркова с избыточными связями.

№	Сеть	Статистика Пирсона	Разность статистик Пирсона для полной и упрощенной моделей	p -значение для разности (при 1 ст. св.)
1	Полная (2 ст. св.)	0.026	-	-
2	Упрощенная ($\lambda_0=0$)	457.580	457.555	0.000
3	Упрощенная ($\lambda_1=0$)	0.026	0.000	1.000
4	Упрощенная ($\lambda_2=0$)	710.305	710.279	0.000
5	Упрощенная ($\lambda_3=0$)	718.422	718.396	0.000
6	Упрощенная ($\lambda_4=0$)	2.978	2.953	0.086
7	Упрощенная ($\lambda_5=0$)	0.052	0.026	0.871
8	Упрощенная ($\lambda_6=0$)	2.104	2.078	0.149
9	Упрощенная ($\lambda_7=0$)	0.097	0.072	0.789
10	Упрощенная ($\lambda_8=0$)	0.026	0.000	1.000
11	Упрощенная ($\lambda_9=0$)	0.062	0.037	0.848

Как видно из табл. 2.2, связи с интенсивностями λ_1 , λ_5 , λ_7 , λ_8 и λ_9 избыточны и могут быть удалены из сети ($p > 0,5$); связи с интенсивностями λ_0 , λ_2 и λ_3 высоко значимы и должны быть сохранены ($p < 0,01$); связи с интенсивностями λ_4 , λ_6 полагаются «спорными» ($0,01 \leq p \leq 0,5$) и исследуются на следующей итерации уточнения.

Вторая итерация уточнения показала, что связи с интенсивностями λ_4 и λ_6 высоко значимы и должны быть сохранены (табл. 2.3). Полученная сеть Маркова представлена на рис. 2.7.

Таблица 2.3. Статистические оценки, полученные на второй итерации уточнения сети Маркова с избыточными связями.

№	Сеть	Статистика Пирсона	Разность статистик Пирсона для полной и упрощенной моделей	p -значение для разности
1	Полная	0.276	-	-
2	Упрощенная ($\lambda_4=0$)	911.668	911.392	0.000
3	Упрощенная ($\lambda_6=0$)	1086.616	1086.340	0.000

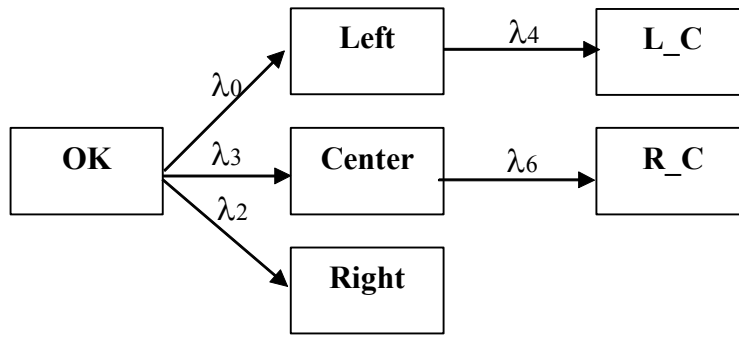


Рис. 2.7. Уточнённая сеть Маркова.

Определение способа включения в сеть состояния **Unknown** выполнялось по рассмотренной выше схеме, но без исследования на смежность с помощью карты Кохонена. Сеть с избыточными связями содержала в себе все возможные пути перехода к состоянию **Unknown** (рис. 2.8). Удаление этих связей после двух итераций уточнения привело к окончательному варианту сети, представленному на рис. 2.9 (значимой оказалась только связь с интенсивностью μ_5). Система уравнений Колмогорова, описывающая динамику изменения вероятностей нахождения в состояниях сети (p_{ok} , p_{left} , p_{center} , p_{right} , p_{l-c} , p_{r-c} and $p_{unknown}$), имеет вид:

$$\frac{dp_{ok}}{dt} = -(\lambda_0 + \lambda_2 + \lambda_3)p_{ok},$$

$$\frac{dp_{left}}{dt} = \lambda_0 p_{ok} - \lambda_4 p_{left},$$

$$\frac{dp_{center}}{dt} = \lambda_3 p_{ok} - \lambda_6 p_{center},$$

$$\frac{dp_{right}}{dt} = \lambda_2 p_{ok},$$

$$\frac{dp_{l-c}}{dt} = \lambda_4 p_{left},$$

$$\frac{dp_{r-c}}{dt} = \lambda_6 p_{center} - \mu_5 p_{r-c},$$

$$\frac{dp_{unknown}}{dt} = \mu_5 p_{r-c}.$$

Для интегрирования системы задаются следующие начальные условия:

$$p_{ok}(0) = 1, p_{left}(0) = p_{center}(0) = p_{right}(0) = p_{l-c}(0) = p_{r-c}(0) = p_{unknown}(0) = 0.$$

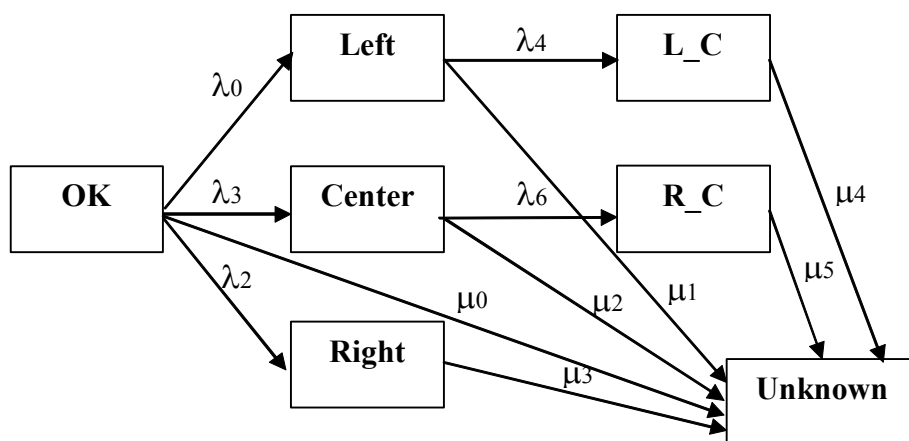


Рис. 2.8. Сеть Маркова с состоянием *Unknown* и избыточными связями.

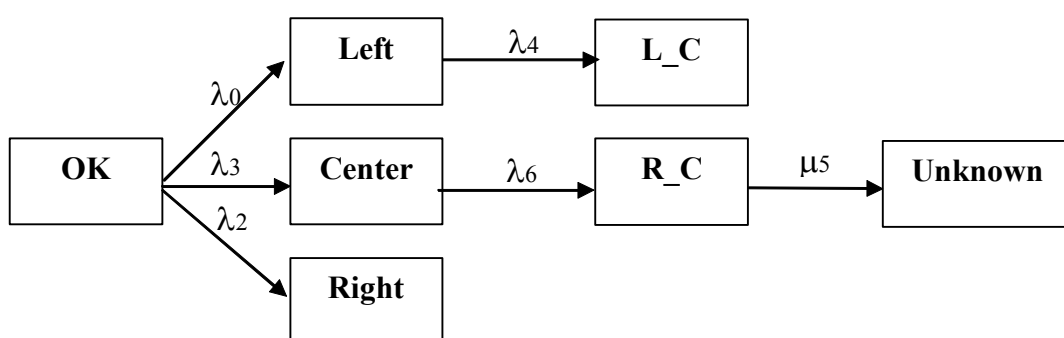


Рис. 2.9. Уточненная сеть Маркова с состоянием *Unknown*.

Построение (модификацию) сети без исследования на смежность с помощью карт Кохонена целесообразно применять, если число определяемых свободных параметров не превышает числа независимых наблюдаемых статистик F_k , а карты Кохонена не позволяют достоверно определять структуру связей (как в случае состояния **Unknown**).

Синтезированная сеть обеспечивает хороший прогноз: поскольку вероятность превышения полученного значения статистики Пирсона, равного 3,396, при шести степенях свободы³² составляет 0,76, критерий согласия не дает оснований считать различия между наблюдаемыми и прогнозируемыми гистограммами (рис. 2.10) статистически значимыми.

³² $(7-1) \times 2 = 12$ независимых статистик использовались для определения значений шести свободных параметров.

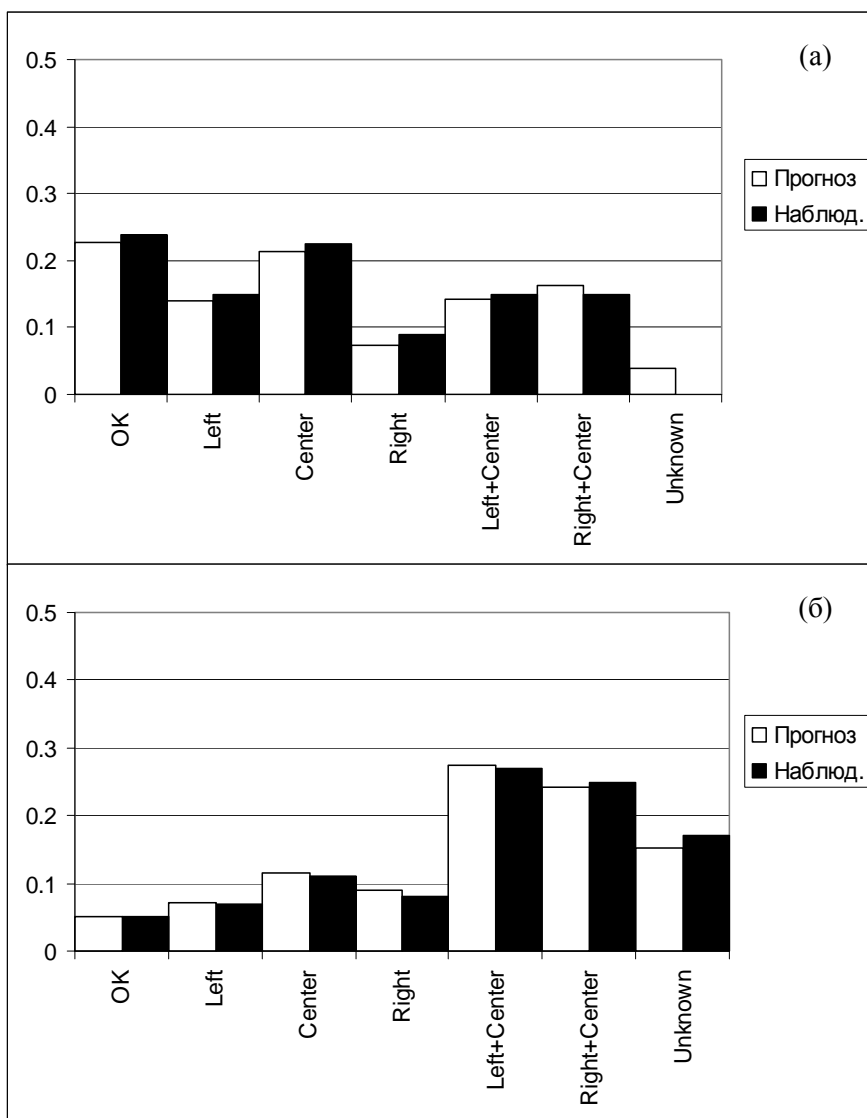


Рис. 2.10. Прогнозируемые и наблюдаемые относительные частоты появления различных типов разрушений по истечении: (а) 1000 час эксплуатации, (б) 2000 час эксплуатации.

Зависимости вероятностей появления различных типов разрушений от времени показаны на рис. 2.11. Представленные графики позволяют прогнозировать срок службы конструкции, дают возможность устанавливать обоснованный регламент плановых осмотров и облегчают диагностику.

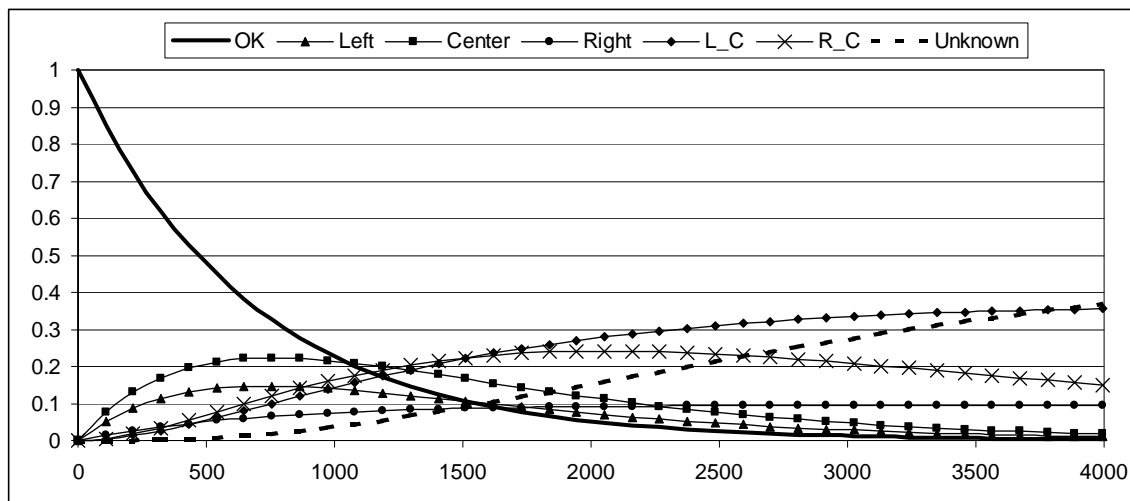


Рис. 2.11. Вероятности появления различных типов разрушений как функции времени (время указано в часах).

Чтобы получить простейший вычислительный инструмент для исследования динамики вероятностей появления различных повреждений, в соответствии с процедурой, представленной в разделе 2.2.3, на основе сети, изображённой на рис. 2.7, была построена цепь Маркова. Дискретизация времени проводилась с шагом в 100 часов, соизмеримым с 2000-часовым интервалом наблюдений. Численное решение соответствующей задачи многомерной условной оптимизации реализовано с помощью специального макроса в электронной таблице *MS Excel*. Вычисленная матрица вероятностей переходов дала пренебрежимо малую невязку³³. Полученная цепь Маркова представлена на рис. 2.12. На рис. 2.13 для иллюстрации приведено сравнение результатов интегрирования функций, представляющих вероятности пребывания в состояниях сети Маркова, и результатов имитационного моделирования для соответствующей цепи Маркова после 100 итераций. Необходимые вычисления были выполнены в среде графического программирования LabVIEW.

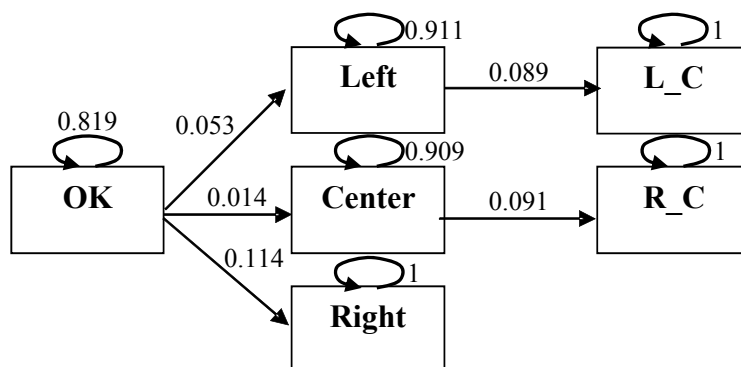


Рис. 2.12. Цепь Маркова с вероятностями переходов, рассчитанными с помощью сети Маркова.

³³ Статистика Пирсона не превышает 0,0001 ($p > 0,9999$).

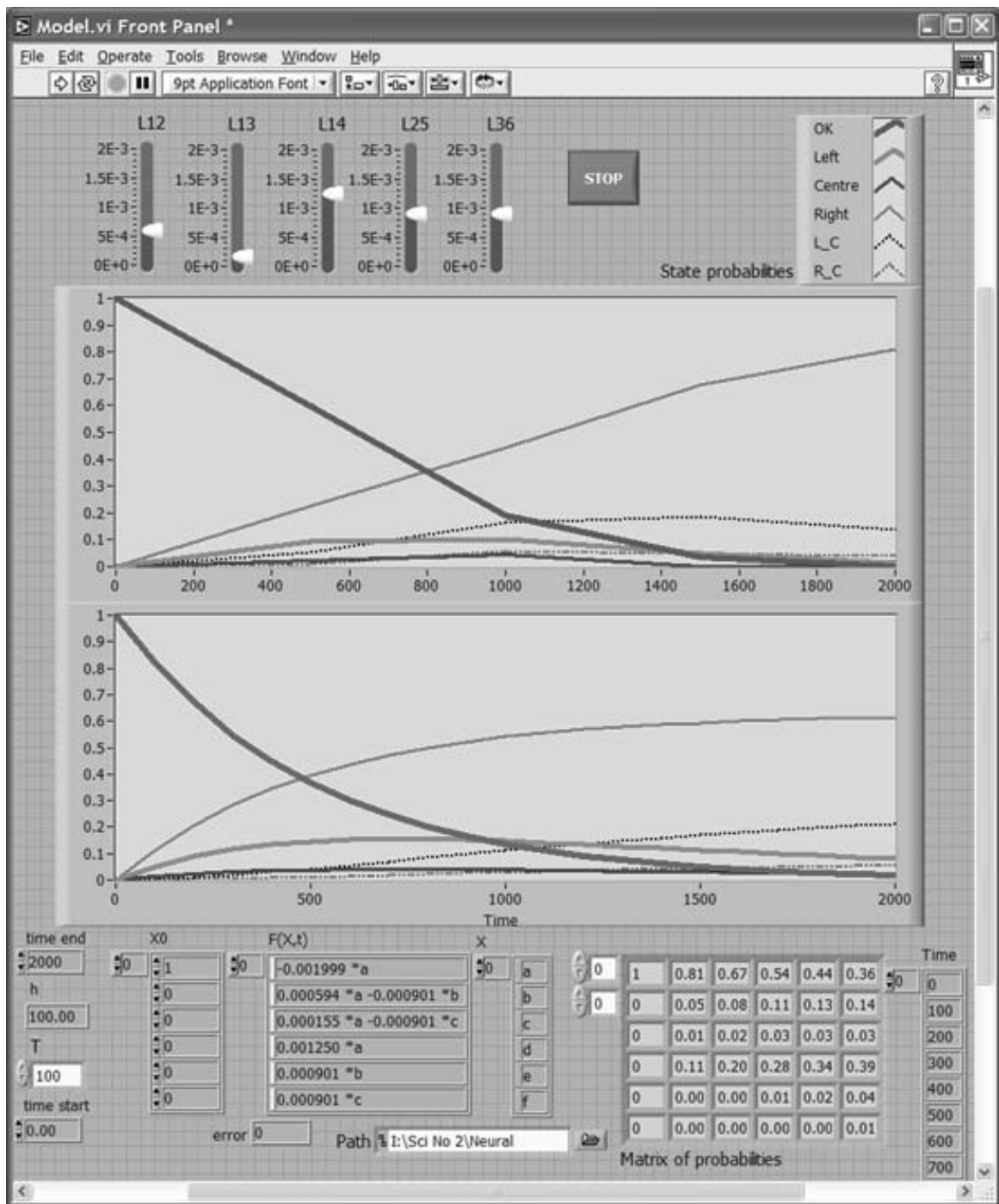


Рис. 2.13. Сравнение результатов интегрирования функций, представляющих вероятности пребывания в состояниях сети Маркова (нижний график), и результатов имитационного моделирования для соответствующей цепи Маркова (верхний график).

Для вычисления наиболее вероятной последовательности повреждений, представленных состояниями модели, по трём спектральным характеристикам, наблюдаемым со 100-часовым временным интервалом в контрольных точках конструкции, была решена задача идентификации. Возможные последовательности состояний уточнённой модели, представленной в форме сети Маркова на рис. 2.7 и в форме цепи Маркова на рис. 2.12, приведены во втором столбце таблицы 2.4. Таблица 2.5 содержит

параметры плотностей вероятностей евклидовых расстояний наблюдаемых спектральных характеристик, возникающих в случае каждого состояния, от соответствующих центроидов состояний, а также евклидовы расстояния наблюдаемых характеристик от центроидов состояний. Для устранения влияния избыточной информации, указанные расстояния вычислялись после понижения размерности результатов наблюдений (см. раздел 2.2.1.2). Согласно постановке задачи начальным состоянием исследуемой системы является состояние ОК.

Таблица 2.4. Возможные последовательности состояний уточнённой модели и их вероятностные характеристики.

Номер	Последовательность состояний	Вероятность появления последовательности состояний	Вероятностная оценка появления наблюдаемой последовательности спектральных характеристик
1	{ОК,ОК,ОК}	0.671	0.000000064
2	{ОК,ОК,Left}	0.043	0.129708896
3	{ОК,ОК,Center}	0.011	0.000283591
4	{ОК,ОК,Right}	0.093	0.000571344
5	{ОК,Left,Left}	0.048	0.374853359
6	{ОК,Left,L_C}	0.005	0.031801329
7	{ОК,Center,Center}	0.013	0.000007695
8	{ОК,Center,R_C}	0.001	0.000000002
9	{ОК,Right,Right}	0.114	0.000004562

Таблица 2.5. Параметры плотностей вероятностей нормальных распределений евклидовых расстояний наблюдаемых характеристик, возникающих в случае каждого состояния, от соответствующих центроидов и евклидовы расстояния наблюдаемых характеристик от центроидов состояний.

	ОК	Left	Center	Right	L_C	R_C
Среднее значение	1,126	0,594	0,432	0,484	0,669	0,549
Стандартное отклонение	0,049	0,253	0,303	0,224	0,252	0,193
Евклидовы расстояния 1 ^й наблюдаемой характеристики от центроидов состояний	1,108	1,777	1,842	1,967	1,897	1,993
Евклидовы расстояния 2 ^й наблюдаемой характеристики от центроидов состояний	1,251	0,282	1,420	1,314	0,913	1,503
Евклидовы расстояния 3 ^й наблюдаемой характеристики от центроидов состояний	1,427	0,463	1,363	1,288	0,878	1,448

Сравнение значений, представленных в последнем столбце таблицы 2.4, приводит к выводу о том, что наиболее вероятной является последовательность повреждений {OK,Left,Left}.

2.4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Разработаны методы построения и анализа скрытых марковских моделей, наилучшим образом согласующихся с наблюдениями. Эти методы используют технику статистической идентификации и могут применяться для моделей с дискретным и непрерывным временем.

Синтез моделей может выполняться при наличии неопределённостей, включая отсутствие полной информации о состояниях системы и связях между ними. При решении задачи определяются множество подходящих состояний, их связи и оптимальные значения свободных параметров модели. Модель первого приближения формируется с помощью многомерного статистического анализа наблюдаемых данных или их обработки посредством самоорганизующихся карт Кохонена. Затем эта структура подвергается коррекции по определённым правилам. Связи между различными состояниями определяются в соответствии со смежностью или их кластеров, или приписанных состояниям областей выигрывающих элементов топологических карт Кохонена, опираясь на статистические критерии согласия. Неидентифицированные наблюдения частично определяются методом распространения классификации с помощью самоорганизующихся карт Кохонена или кластерного анализа. Для обучения полученных моделей используются гистограммы наблюдаемых частот пребывания в различных состояниях системы после заданных периодов эксплуатации. Свободные параметры моделей идентифицируются методом минимума хи-квадрат. С целью повышения надёжности, для моделей с дискретным временем выполняется переход к обучаемым структурам с непрерывным временем, с последующим возвратом в дискретный масштаб времени и идентификацией вероятностей переходов между состояниями.

Благодаря гибкости и универсальности рассмотренный способ решения имеет очевидные преимущества перед методами, использовавшимися ранее при построении оценок максимального правдоподобия для параметров скрытых цепей Маркова. Более того, традиционные алгоритмы, использовавшиеся для скрытых марковских моделей, не позволяют решить прикладную техническую задачу, разобранную в данной статье, при наличии неопределённостей, связанных с типами повреждений конструкции, выбором состояний модели и структуры их связей, а также при небольшом числе контрольных моментов наблюдений.

Представленные методы полезны для специалистов, отвечающих за эксплуатацию и обслуживание технических систем. Однако область их применения далеко выходит за рамки той прикладной задачи, которая

рассмотрена в качестве иллюстрации в этой работе, позволяя использовать предложенный аппарат для решения многочисленных технических и нетехнических задач. В частности, полученные марковские модели применимы для диагностики, распознавания образов, прогнозирования сроков службы конструкций и планирования регламентных работ.

ЛИТЕРАТУРА К РАЗДЕЛУ 2

1. Baranov S.N. and Kuravsky L.S. Acoustic vibrations: modeling, optimization and diagnostics. - 2nd Edition, enlarged, Moscow: RUSAVIA, 224 pp., 2006.
2. Baum L.E., Petrie T., Soules G., and Weiss N. A maximization technique occurring in the statistical analysis of probabilistic functions of Markov chains. - Ann. Math. Statist., vol. 41, No. 1, pp. 164–171, 1970.
3. Bendat J.S. and Piersol A.G. Random data. Analysis and measurement procedures. - New York: John Wiley & Sons, 1986.
4. Bishop Y.M.M., Fienberg S.E., and Holland P.W. Discrete multivariate analysis: Theory and practice. - Cambridge, MA: M. I. T. Press, 1975.
5. Bogdanoff J.L. and Kozin F. Probabilistic Models of Cumulative Damage. - New York: John Wiley & Sons, 1985.
6. Brousset C. and Baudrillard G. Neural network for automating diagnosis in aircraft inspection. - Review of Progress in Quantitative Nondestructive Evaluation (Ed. by D.O. Thompson and D.E. Chimenti), Plenum Press, New York, vol. 12, pp.797-802, 1993.
7. Cramer H. Mathematical methods of statistics. - Princeton: Princeton University Press, 1946.
8. Kohonen T. Self-organizing maps. - Heidelberg: Springer Verlag, 1995.
9. Kuravsky L.S. and Baranov S.N. Condition monitoring of the structures suffered acoustic fatigue failure and forecasting their service life. - Proc. Condition Monitoring 2003, Oxford, United Kingdom, pp. 256-279, July 2003.
10. Kuravsky L.S. and Baranov S.N. Neural networks in fatigue damage recognition: diagnostics and statistical analysis. - Proc. 11th International Congress on Sound and Vibration, St.-Petersburg, Russia, pp. 2929-2944, July 2004.

11. Kuravsky L.S. and Baranov S.N. Synthesis of Markov networks for forecasting fatigue failures. - Proc. Condition Monitoring 2003, Oxford, United Kingdom, pp. 76-91, July 2003.
12. Kuravsky L.S. and Baranov S.N. The concept of multifactor Markov networks and its application to forecasting and diagnostics of technical systems. - Proc. Condition Monitoring 2005, Cambridge, United Kingdom, pp. 111-117, July 2005.
13. L. S. Kuravsky, P. A. Marmalyuk, G. A. Yuryev and P. N. Dumin A Numerical Technique for the Identification of Discrete-State Continuous-Time Markov Models. - Applied Mathematical Sciences, Vol. 9, 2015, no. 8, 379 – 391, <http://dx.doi.org/10.12988/ams.2015.410882>.
14. Marple S.L., Jr. Digital spectral analysis with applications. - New Jersey: Prentice-Hall, 1987.
15. Pidaparti R.M.V. and Palakal M.J. Neural network approach to fatigue-crack-growth predictions under aircraft spectrum loadings. - Journal of Aircraft, vol. 32, pp.825-831, 1995.
16. Rabiner L.R. A tutorial on hidden Markov models and selected applications in speech recognition. - Proc. IEEE, vol.77, No.2, pp.257–286, 1989.
17. Viterbi A.J. Error bounds for convolutional codes and an asymptotically optimum decoding algorithm. - IEEE Transactions on Information Theory, vol.13, No.2, pp.260-269, 1967.
18. Куравский Л. С., Баранов С. Н. Дискриминантные сети в задачах диагностики. - Нейрокомпьютеры: разработка и применение, 2003, №8-9, с. 3-9.
19. Куравский Л. С., Баранов С. Н. Применение нейронных сетей для диагностики и прогнозирования усталостного разрушения тонкостенных конструкций. – Нейрокомпьютеры: разработка и применение, 2001, №12, с. 47-63.
20. Куравский Л.С., Баранов С. Н., Малых С. Б. Нейронные сети в задачах прогнозирования, диагностики и анализа данных: Учеб. пособие. – М.: РУСАВИА, 2003. – 100 с.
21. Куравский Л.С., Мармалюк П.А., Юрьев Г.А., Думин П.Н. Методы численной идентификации марковских моделей и их сравнительный анализ. – Информационные технологии, т. 21, 2015, №10, с. 792– 800.
22. Куравский Л.С., Мармалюк П.А., Юрьев Г.А., Думин П.Н. Численные методы идентификации марковских процессов с дискретными состояниями и непрерывным временем. - Математическое моделирование, 2017, т.29, № 5, с. 133-146.

23. Лоули Д., Максвелл А. Факторный анализ как статистический метод. – М.: Мир, 1967. – 144 с.

РАЗДЕЛ 3. СЛОЖНЫЕ МАРКОВСКИЕ МОДЕЛИ И ИХ ПРАКТИЧЕСКОЕ ПРИМЕНЕНИЕ

Рассмотрены сложные марковские модели и примеры их практического применения. Представлен новый подход к построению интеллектуальных и компетентностных тестов, основанный на представлении движения взора испытуемого по поверхности стимулов с помощью одной из наиболее общих разновидностей случайных процессов и соответствующих этой формализации технологиях диагностики. В качестве иллюстрации приведён пример практического применения полученных результатов для выявления уровня математической подготовки студентов и школьников.

Предложена концепция обучаемых многофакторных сетей Маркова, позволяющих исследовать эффекты воздействия двух и более факторов различной природы, гибко учитывая особенности поведения наблюдаемых систем и улучшая качество прогнозирования. Разобрана техника декомпозиции многофакторных сетей, существенно упрощающая их идентификацию.

Рассмотрены многофакторные сети Маркова, применяемые для исследования эволюции и взаимодействия психологических характеристик и обученные, используя наблюдаемые распределения индивидуальных характеристик испытуемых в контрольные моменты времени, а также аналогичные по структуре сети, позволяющие прогнозировать поведение сложных технических систем. Возможности представленного подхода продемонстрированы на примерах моделей усталостного разрушения металлических конструкций.

3.1. КОМПЬЮТЕРНОЕ ТЕСТИРОВАНИЕ КАК ПРИМЕР ЗАДАЧИ, ТРЕБУЮЩЕЙ ПРИМЕНЕНИЯ СЛОЖНЫХ МАРКОВСКИХ МОДЕЛЕЙ

Компьютерное тестирование в настоящее время широко используется в медицине, психологии и образовании с целью диагностики, определения уровня компетенций и пригодности испытуемых для выполнения тех или иных функций, включая контроль качества обучения. Качество тестирования и достоверность его результатов в значительной степени зависят от технологий проведения тестов, которые в последние десятилетия стали предметом активных научных исследований.

В первое время тесты строились на основе классической теории тестирования [36, 44, 45], в основе которой лежит теория погрешности измерений, заимствованная из физики: полагалось, что измеряемые характеристики имеют некоторые «истинные» значения, искажаемые случайными и систематическими погрешностями. Этот подход получил

определённое распространение, однако его практическому применению препятствует ряд существенных недостатков:

- возникают проблемы при сравнении сходных особенностей испытуемых, выявленных с помощью разных методик;
- не решается проблема валидности;
- тестовые баллы становятся недостаточно надёжными в областях экстремальных значений;
- технология в целом недостаточно надёжна и универсальна.

Для преодоления указанных проблем была разработана новая технология тестирования, основанная на латентно-структурном анализе и до сих пор называемая *современной теорией тестирования (Item Response Theory – IRT)* [17, 36, 39, 63]. В русскоязычной литературе также используются и другие варианты её названия: теория ответов на вопросы, стохастическая теория тестов, математическая теория измерений, теория латентных черт, теория характеристических кривых заданий, теория моделирования и параметризации педагогических тестов и т.д. Основная концепция данного подхода, предложенного Г. Рашем в 1960 году, предполагает, что вероятность правильного ответа на задание определяется разностью уровня знаний или способностей и трудности теста. В зависимости от условий прикладной задачи на практике используются и другие, более сложные модели, построенные на базе данной концепции [63, 69, 70].

В рамках технологии IRT может быть реализована концепция *адаптивного тестирования*, согласно которой испытуемому с определённой текущей расчётной оценкой уровня знаний или способностей на каждом шаге тестирования вычисляются и предлагаются задания со сложностью, обеспечивающей наибольшую дифференциацию результатов для разных категорий испытуемых.

Применение технологии IRT приводит к следующим проблемам:

- «статичность» оценок: игнорирование того факта, что результат тестирования вследствие усталости испытуемых и других факторов может, вообще говоря, существенно изменяться со временем, принимая различные значения в процессе сеанса тестирования;
- невозможность учёта времени, затрачиваемого на решение тестовых задач, при построении расчётных оценок;
- необходимость выполнения достаточно большого числа заданий для получения оценок с приемлемой точностью;
- сравнительно сложная для практической реализации процедура оценки точности результата, связанная с применением метода максимального правдоподобия и расчётом доверительных интервалов.

Указанные проблемы сделали актуальными поиск и разработку новых принципов построения технологий тестирования. Одним из наиболее перспективных результатов в этой области стал новый подход к адаптивному тестированию [14, 17, 18, 27, 29], построенный на использовании *обучаемых*

структур в форме марковских моделей с дискретным и непрерывным временем. Его особенностями, обеспечивающими преимущества перед аналогичными способами тестирования, являются:

- выявление и использование при построении расчётных оценок временной динамики изменения способности справляться с заданиями теста;
- возможность учёта при построении расчётных оценок времени, затрачиваемого на решение тестовых задач;
- возможность исследования временной динамики знаний или способностей как в дискретной, так и в непрерывной временной шкале;
- меньшее по сравнению с другими подходами число заданий, которое следует предъявлять испытуемому для получения оценок знаний или способностей с заданной точностью, что ускоряет процесс тестирования;
- получение распределения вероятностей возможных результатов теста в качестве конечного результата;
- развитая техника идентификации параметров моделей.

Одной из наиболее серьёзных проблем, возникающих в процессе тестирования, является проявление в истории ответов испытуемого влияния искажающих результаты *артефактов*, обусловленных подсказками, угадыванием и другими формами некорректного целенаправленного вмешательства в процедуру испытаний. Разработанная технология адаптивного тестирования на базе марковских моделей позволяет бороться с этим явлением, устраняя артефакты на основе сравнения наблюдаемых и прогнозируемых результатов ответов на вопросы для разных уровней способностей испытуемых [28, 30]. В качестве инструмента для сравнения используется приспособленный для решения задачи тестирования *многомерный непрерывный фильтр Калмана* [35, 38] – нестационарная система с обратной связью, включающая в себя как составную часть формирующий фильтр, воспроизводящий идеализированную модель поведения.

Второе перспективное направление в развитии технологий тестирования связано с применением факторных моделей [33]. Его преимуществами по сравнению с другими подходами является отсутствие проблемы оценки сложности заданий тестов, а также возможность описания структуры способностей методами структурного моделирования. Устранение артефактов тестирования в этом случае обеспечивается *многомерным цифровым фильтром Калмана*. Процедура тестирования является неадаптивной. Этот подход, как и предыдущий, учитывает влияние фактора времени на результаты тестирования и обеспечивает уменьшение времени прохождения процедуры испытаний.

На основе рассмотренных выше технологий тестирования, использующих марковские и факторные модели, разработаны системы поддержки принятия решений [18, 33], которые ускоряют процесс

тестирования, оптимизируя предъявление тестовых заданий. Диагностические выводы строятся на основе уточняющихся в процессе тестирования вероятностных оценок принадлежности испытуемых к различным категориям. Подобные инструменты дают практикующему специалисту дополнительную информацию для анализа и, в случае марковских моделей, предоставляют рекомендации по выбору следующего теста, обладающего, по сравнению с прочими, наибольшей для данного испытуемого дифференцирующей способностью. Такие рекомендации, не являясь обязательными и не лишая специалиста возможности получения собственного опыта, направляют его по наиболее эффективному и надёжному пути. Следует отметить, что сам процесс тестирования при этом не становится полностью автоматическим в силу многокомпонентности процедуры оценки способностей и наличия дополнительных неформализуемых критериев.

Все рассмотренные выше технологии тестирования объединяет общий признак: итоговые оценки обычно определяются только по формальным результатам выполнения заданий, предъявляемых испытуемому, без анализа хода его рассуждений и динамики изменения состояния человека в процессе выполнения теста. Это существенно ограничивает возможности измерительной процедуры, что обусловлено, во-первых, её, как правило, значительной продолжительностью, изменяющей психофизиологическое состояние испытуемого и его способности справляться с заданиями, и, во-вторых, упомянутой выше проблемой некорректного целенаправленного вмешательства в процедуру испытаний, искажающего вычисляемые баллы.

Перспективы преодоления этих проблем, по мнению многих экспертов, связаны с включением в процесс тестирования методов современной экспериментальной психологии и, в частности, средств анализа глазодвигательной активности [1-7]. Среди разработанных в этой области общих подходов следует отметить:

- анализ традиционных параметров траекторий движений глаз (общего времени чтения, усреднённых характеристик фиксаций, прогрессивных и регрессивных саккад и т.д.) [8, 64],
- анализ специальных показателей траекторий (соотношений времен пребывания взора в различных зонах стимула, частот посещения различных зон стимула и переходов от одной зоны к другой, степени следования испытуемыми различным пространственным стратегиям и т.д.) [31, 37, 60, 68],
- анализ символьных последовательностей с использованием метрики различий [40, 59],
- методы, основанные на исследовании структуры и различных манипуляциях с матрицами переходных вероятностей цепей Маркова [43, 44, 46, 47, 61, 65, 66],
- методы, построенные на использовании скрытых марковских моделей [41, 62, 65-67].

Наиболее перспективными для анализа глазодвигательной активности испытуемых при прохождении тестовых процедур представляются так называемые *матрицы представления приемника* (*SR-матрицы*), вычисляемые как пределы сумм степенных последовательностей матриц переходных вероятностей цепей Маркова [43].

Несмотря на отдельные примеры практического применения, развитие и распространение перечисленных выше методов, включая анализ *SR-матриц*, сдерживается рядом ограничений, наиболее существенными из которых являются слабые возможности для исследования временной динамики движения глаз, неразвитый математический аппарат, низкая степень дифференциации проблемных категорий испытуемых и недостаточная универсальность.

В разделе 3 рассмотрен новый подход к построению интеллектуальных и компетентностных тестов [19], основанный на представлении движения взора испытуемого по поверхности стимулов с помощью одной из наиболее общих разновидностей случайных процессов и соответствующих этой формализации технологиях диагностики. Особое внимание уделено математическому обоснованию рассмотренных методов. В качестве иллюстрации приведён пример практического применения полученных результатов для выявления уровня математической подготовки студентов и школьников.

3.2. МАРКОВСКИЕ ПРОЦЕССЫ ОБЩЕГО ВИДА И ИХ ДИСКРЕТИЗАЦИЯ

Будем полагать, что испытуемым предъявляется плоский стимул прямоугольной формы, представляющий содержательную информацию по определённой тематике. Испытуемые разделены на несколько заранее известных категорий, отражающих уровень знаний или компетенций по данной тематике. Считая, что для каждой из этих категорий имеется идентифицированная по результатам наблюдений оценка распределения вероятностей пребывания взора на поверхности стимула, поставим задачу распознавания категории $\omega \in \Omega$, к которой принадлежит испытуемый, по данным о движении его взора по поверхности стимула.

Классификация в указанной постановке обеспечивается решением рассмотренных далее следующих подзадач:

- выбора математического представления движения взора испытуемого по поверхности стимула;
- идентификации распределения вероятностей пребывания взора на поверхности стимула по результатам наблюдений для всех рассматриваемых категорий испытуемых;

- оценки вероятности наблюдаемой траектории движения взора по поверхности стимула при условии принадлежности к каждой из заданных категорий испытуемых.

Пусть движение взора по поверхности стимула описывается векторной непрерывной случайной функцией времени $\mathbf{U}(t)=(U_1(t), U_2(t))$, где $t \in T$. Плотность вероятности $p(\mathbf{u}, t)$, характеризующая распределение значений функции $\mathbf{U}(t)$, определяется при этом как $p(\mathbf{u}, t) d\mathbf{u} = P\{\mathbf{u} \leq \mathbf{U}(t) < \mathbf{u} + d\mathbf{u}\}$, где $\mathbf{u}=(u_1, u_2)=(x, y)$, а $d\mathbf{u}$ – элемент объёма в \mathbf{R}^2 .

Будем полагать, что рассматриваемая случайная функция принадлежит к достаточно общему классу *марковских процессов* или *процессов без последствия*, для которых в любые моменты времени $t_0 < t_1 < \dots < t_m$ выполняется условие $p(\mathbf{u}_m, t_m | \mathbf{u}_{m-1}, t_{m-1}; \dots; \mathbf{u}_0, t_0) = p(\mathbf{u}_m, t_m | \mathbf{u}_{m-1}, t_{m-1})$. Такие процессы полностью определяются начальным распределением $p(\mathbf{u}_0, t_0)$ и распределением *переходных вероятностей* $p(\mathbf{u}, t | \mathbf{u}_0, t_0)$. Это распределение в случае непрерывных процессов удовлетворяет *уравнению Фоккера-Планка-Колмогорова*:

$$\frac{\partial p}{\partial t} = - \sum_{j=1}^2 \frac{\partial}{\partial u_j} (a_j p) + \sum_{j=1}^2 \sum_{k=1}^2 \frac{\partial^2}{\partial u_j \partial u_k} (b_{jk} p)$$

с начальным условием $p(\mathbf{u}, t | \mathbf{u}_0, t_0) |_{t=t_0} = \delta(\mathbf{u} - \mathbf{u}_0)$. Интенсивности рассматриваемых марковских процессов $a_j(\mathbf{u}, t)$ и $b_{jk}(\mathbf{u}, t)$, называются, соответственно, *коэффициентами сноса и диффузии*.

Опуская для удобства записи знак суммы при наличии повторяющихся индексов в суммируемых выражениях, перепишем последнее уравнение в следующем виде:

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \left[- \frac{\partial}{\partial u_i} a_i + \frac{\partial^2}{\partial u_i \partial u_j} b_{ij} \right] p.$$

Обозначив $\left[a_i - \frac{\partial}{\partial u_j} b_{ij} \right] p$ как J_i , это уравнение можно представить в более удобной форме:

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -\text{div} \mathbf{J}, \quad (1)$$

где $\mathbf{J}=(J_1, J_2)=(J_x, J_y)$ есть *плотность потока вероятностей*.

Можно показать, что составляющие плотности потока вероятностей представляются следующими выражениями:

$$J_x = \left(a_x - \frac{\partial b_{xx}}{\partial x} - \frac{\partial b_{xy}}{\partial y} - b_{xx} \frac{\partial \ln p}{\partial x} - b_{xy} \frac{\partial \ln p}{\partial y} \right) p,$$

$$J_y = \left(a_y - \frac{\partial b_{yy}}{\partial y} - \frac{\partial b_{yx}}{\partial x} - b_{yy} \frac{\partial \ln p}{\partial y} - b_{yx} \frac{\partial \ln p}{\partial x} \right) p.$$

Следует отметить, что, в общем случае, $b_{xy} \neq b_{yx}$.

Введя обозначения

$$\lambda_x = a_x - \frac{\partial b_{xx}}{\partial x} - \frac{\partial b_{xy}}{\partial y} - b_{xx} \frac{\partial \ln p}{\partial x} - b_{xy} \frac{\partial \ln p}{\partial y},$$

$$\lambda_y = a_y - \frac{\partial b_{yy}}{\partial y} - \frac{\partial b_{yx}}{\partial x} - b_{yy} \frac{\partial \ln p}{\partial y} - b_{yx} \frac{\partial \ln p}{\partial x},$$

компоненты плотности потока вероятностей можно представить в виде:

$$J_x = \lambda_x p, \quad J_y = \lambda_y p.$$

Заметим, что, учитывая медленный характер изменения логарифмической функции, на практике для оценки λ_x и λ_y можно использовать упрощённые формулы, позволяющие в первом приближении считать эти величины не зависящими от p :

$$\lambda_x = a_x - \frac{\partial b_{xx}}{\partial x} - \frac{\partial b_{xy}}{\partial y},$$

$$\lambda_y = a_y - \frac{\partial b_{yy}}{\partial y} - \frac{\partial b_{yx}}{\partial x}.$$

Для вычисления приближённого решения приведённого выше уравнения Фоккера-Планка-Колмогорова проведём дискретизацию замкнутой области стимула ($0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq b$) прямоугольной сеткой, равномерной вдоль каждой из осей (рис. 3.1).

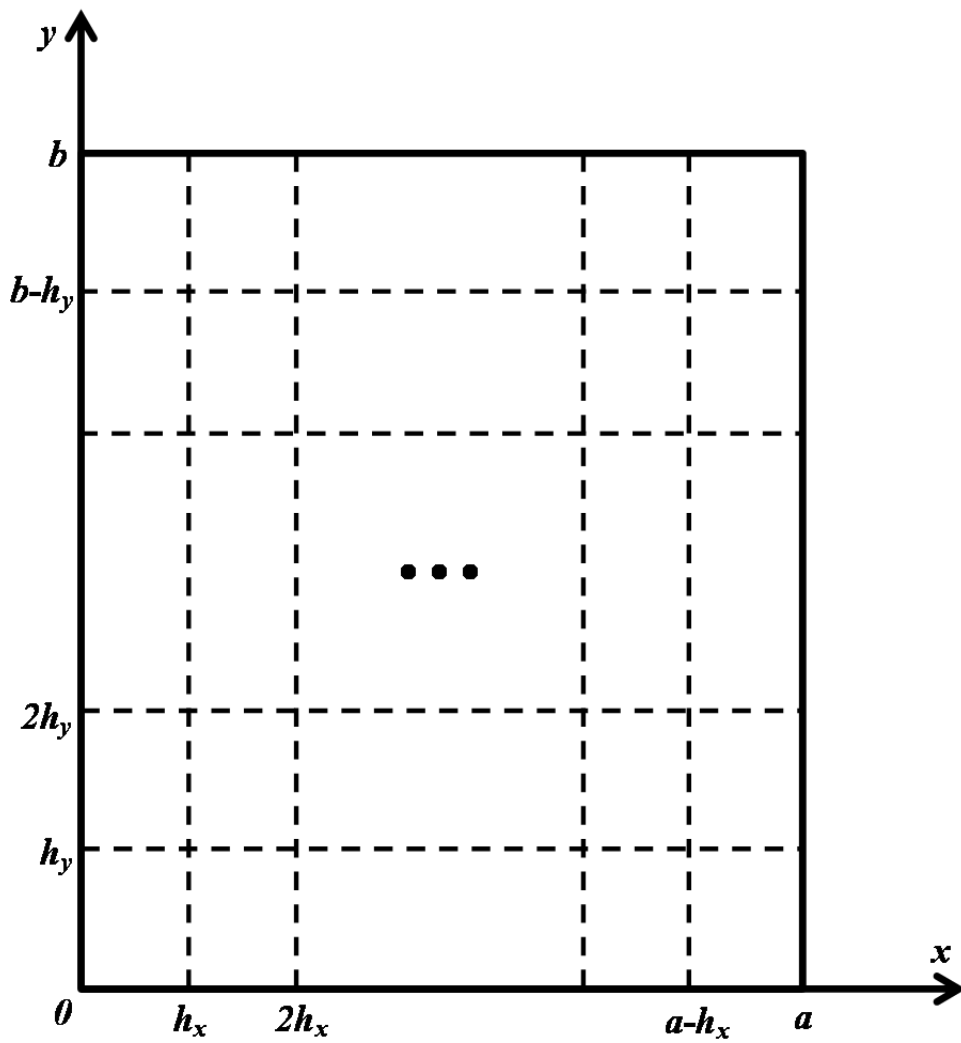


Рис. 3.1. Дискретизация замкнутой области стимула прямоугольной сеткой.

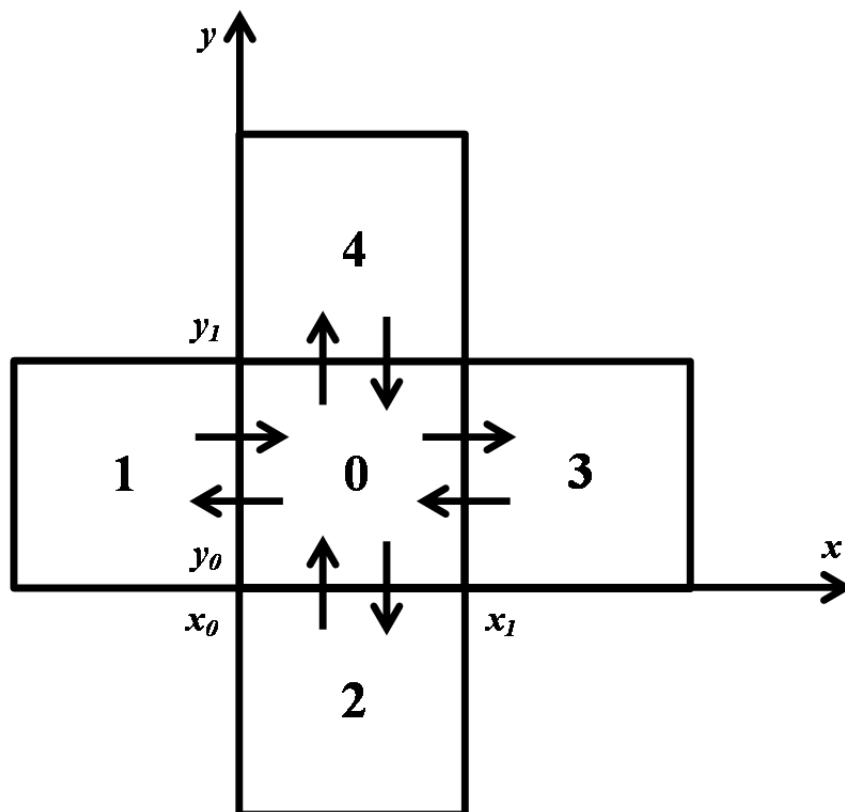


Рис. 3.2. Произвольная внутренняя ячейка прямоугольной сетки.

На границе произвольной внутренней ячейки прямоугольной сетки (рис. 3.2) выполняются следующие условия (верхние индексы обозначают номера ячеек):

$$\begin{aligned}
 J_x(x_0, y, t) &= J_x^0(x_0, y, t) - J_x^1(x_0, y, t), & y_0 \leq y \leq y_1; \\
 J_x(x_1, y, t) &= J_x^0(x_1, y, t) - J_x^3(x_1, y, t), & y_0 \leq y \leq y_1; \\
 J_y(x, y_0, t) &= J_y^0(x, y_0, t) - J_y^2(x, y_0, t), & x_0 \leq x \leq x_1; \\
 J_y(x, y_1, t) &= J_y^0(x, y_1, t) - J_y^4(x, y_1, t), & x_0 \leq x \leq x_1.
 \end{aligned}$$

Усредним правую и левую части уравнения непрерывности (1) по площади произвольной внутренней ячейки (величины, полученные путём усреднения, далее обозначены чертой сверху):

$$\frac{d\bar{p}}{dt} = -\frac{1}{(x_1 - x_0)(y_1 - y_0)} \int_{x_0}^{x_1} \int_{y_0}^{y_1} \left(\frac{\partial J_x}{\partial x} + \frac{\partial J_y}{\partial y} \right) dx dy,$$

где

$$\bar{p} = \frac{1}{(x_1 - x_0)(y_1 - y_0)} \int_{x_0}^{x_1} \int_{y_0}^{y_1} p dx dy.$$

Полученное уравнение после интегрирования принимает вид:

$$\begin{aligned}
\frac{d\bar{p}}{dt} &= -\frac{1}{(x_1 - x_0)(y_1 - y_0)} \left[\int_{y_0}^{y_1} dy (J_x(x_1, y, t) - J_x(x_0, y, t)) \right. \\
&\quad \left. + \int_{x_0}^{x_1} dx (J_y(x, y_1, t) - J_y(x, y_0, t)) \right] \\
&= -\frac{1}{x_1 - x_0} [\bar{J}_x(x_1, t) - \bar{J}_x(x_0, t)] \\
&\quad - \frac{1}{y_1 - y_0} [\bar{J}_y(y_1, t) - \bar{J}_y(y_0, t)], \tag{2}
\end{aligned}$$

где, согласно формуле среднего значения,

$$\begin{aligned}
\bar{J}_x(x_0, t) &= \frac{1}{y_1 - y_0} \int_{y_0}^{y_1} J_x(x_0, y, t) dy = \bar{J}_x^0(x_0, t) - \bar{J}_x^1(x_0, t), \\
\bar{J}_x(x_1, t) &= \frac{1}{y_1 - y_0} \int_{y_0}^{y_1} J_x(x_1, y, t) dy = \bar{J}_x^0(x_1, t) - \bar{J}_x^3(x_1, t), \\
\bar{J}_y(y_0, t) &= \frac{1}{x_1 - x_0} \int_{x_0}^{x_1} J_y(x, y_0, t) dx = \bar{J}_y^0(y_0, t) - \bar{J}_y^2(y_0, t), \\
\bar{J}_y(y_1, t) &= \frac{1}{x_1 - x_0} \int_{x_0}^{x_1} J_y(x, y_1, t) dx = \bar{J}_y^0(y_1, t) - \bar{J}_y^4(y_1, t), \tag{3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bar{J}_x^k(x_j, t) &= \frac{1}{y_1 - y_0} \int_{y_0}^{y_1} J_x^k(x_j, y, t) dy \\
&= \frac{1}{y_1 - y_0} \int_{y_0}^{y_1} \lambda_x^k(x_j, y, t) p^k(x_j, y, t) dy = \frac{\lambda_x^k(x_j, y^*, t)}{y_1 - y_0} \int_{y_0}^{y_1} p^k(x_j, y, t) dy \\
&= \lambda_x^k(x_j, y^*, t) \bar{p}^k(x_j, t), \quad y_0 \leq y^* \leq y_1, \quad j = 0, 1, \quad k = 0, 1, 3.
\end{aligned}$$

Аналогично: $\bar{J}_y^l(y_j, t) = \lambda_y^l(x^*, y_j, t) \bar{p}^l(y_j, t)$, $x_0 \leq x^* \leq x_1$, $l = 0, 2, 4$.

Подставляя выражения (3) в уравнение (2) и вводя обозначения

$$\begin{aligned}
\alpha_1(t) &= -\frac{\lambda_x^0(x_0, y^*, t)}{x_1 - x_0}, & \alpha_2(t) &= -\frac{\lambda_y^0(x^*, y_0, t)}{y_1 - y_0}, \\
\alpha_3(t) &= \frac{\lambda_x^0(x_1, y^*, t)}{x_1 - x_0}, & \alpha_4(t) &= \frac{\lambda_y^0(x^*, y_1, t)}{y_1 - y_0}, \\
\beta_1(t) &= -\frac{\lambda_x^1(x_0, y^*, t)}{x_1 - x_0}, & \beta_2(t) &= -\frac{\lambda_y^2(x^*, y_0, t)}{y_1 - y_0}, \\
\beta_3(t) &= \frac{\lambda_x^3(x_1, y^*, t)}{x_1 - x_0}, & \beta_4(t) &= \frac{\lambda_y^4(x^*, y_1, t)}{y_1 - y_0}, \\
\bar{p}_1^0(t) &= \bar{p}^0(x_0, t), & \bar{p}_2^0(t) &= \bar{p}^0(y_0, t), \\
\bar{p}_3^0(t) &= \bar{p}^0(x_1, t), & \bar{p}_4^0(t) &= \bar{p}^0(y_1, t),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bar{p}^1(t) &= \bar{p}^1(x_0, t), & \bar{p}^2(t) &= \bar{p}^2(y_0, t), \\
\bar{p}^3(t) &= \bar{p}^3(x_1, t), & \bar{p}^4(t) &= \bar{p}^4(y_1, t),
\end{aligned}$$

получим *обыкновенное дифференциальное уравнение* для произвольной внутренней ячейки прямоугольной сетки (рис. 3.2):

$$\frac{d\bar{p}^0(t)}{dt} = - \sum_{k=1}^4 \alpha_k(t) \bar{p}_k^0(t) + \sum_{l=1}^4 \beta_l(t) \bar{p}^l(t).$$

Уравнения для граничных ячеек сетки получаются путём удаления из данного уравнения слагаемых, относящихся к отсутствующим элементам.

3.3. МНОГОФАКТОРНЫЕ МАРКОВСКИЕ МОДЕЛИ И ИХ ИДЕНТИФИКАЦИЯ

Таким образом, поиск приближённого решения уравнения Фоккера-Планка-Колмогорова сводится к решению задачи Коши для системы приведённых выше обыкновенных дифференциальных уравнений относительно плотности вероятности пребывания взора по поверхности стимула, усреднённой по площади ячеек. Если, умножив каждую усреднённую плотность вероятности на площадь ячейки, рассматривать каждую ячейку прямоугольной сетки размерностью $l \times q$ как отдельное *дискретное состояние случайного процесса с непрерывным временем*, то данная система уравнений превратится в *систему уравнений Колмогорова*, описывающую динамику изменения вероятностей пребывания взора испытуемого в указанных состояниях. Каждому состоянию с номером n при этом ставится в соответствие уравнение

$$\frac{d\tilde{p}^n(t)}{dt} = - \sum_j \eta_{nj}(t) \tilde{p}^n(t) + \sum_i \eta_{in}(t) \tilde{p}^i(t), \quad (4)$$

где $\tilde{p}^n(t) = \bar{p}^n(t)G$ и $\tilde{p}^i(t) = \bar{p}^i(t)G$ – вероятности пребывания в n -м и i -м состояниях; G – площадь ячейки прямоугольной сетки; $n, i = 1, \dots, M; M = lq$; η_{ni} – интенсивность переходов из состояния n в состояние i ; η_{in} – интенсивность переходов из состояния i в состояние n .

Дискретизации области, приведённой на рис. 3.1, при этом соответствует граф дискретных состояний, представленный на рис. 3.3. Интенсивности переходов между несмежными состояниями полагаются равными нулю.

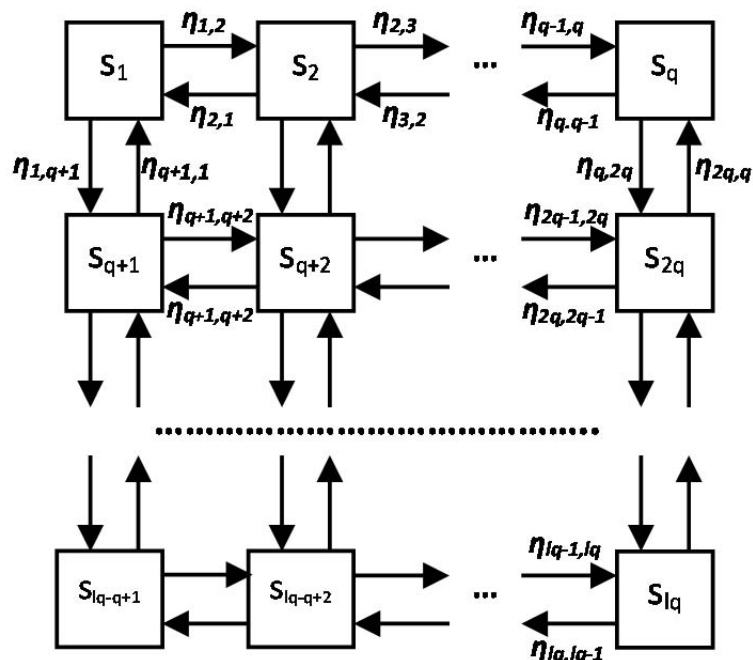


Рис. 3.3. Граф дискретных состояний, аппроксимирующий случайный процесс перемещения взора по поверхности стимула.

Для интегрирования указанной выше системы уравнений необходимо задать начальные условия $\{\tilde{p}^n(0)\}_{n=1,\dots,M}$, где M – число состояний. В любой момент времени t выполняется нормализующее условие: $\sum_{n=1}^M \tilde{p}^n(t) = 1$.

Следуя представленному выше способу решения задачи классификации, необходимо, используя данные наблюдений, идентифицировать распределения вероятностей пребывания взора на поверхности стимула для всех категорий испытуемых. Аппроксимация этих распределений с учётом проведённой дискретизации сводится к оценке интенсивностей переходов между состояниями рассматриваемого случайного процесса $\{\eta_{ij}\}_{i,j=1,\dots,M}$, которые являются свободными параметрами системы уравнений Колмогорова. Эти оценки могут быть определены, опираясь на *критерий соответствия наблюдаемых и прогнозируемых гистограмм*, описывающих распределения частот пребывания в состояниях процесса. В качестве такого критерия далее используется *статистика Пирсона*

$$X^2 = \sum_{i=1}^M \frac{(F_i - \tilde{p}^i(t)N)^2}{\tilde{p}^i(t)N}.$$

В приведённом выше выражении прогнозируемая частота попадания в i -е состояние равна $\tilde{p}^i(t)N$, где N – число элементов в выборке, а вероятностные функции $\tilde{p}^i(t)$ получаются путём численного интегрирования систем уравнений Колмогорова. Соответствующие наблюдаемые частоты F_i определяются по выборочным распределениям пребывания в состояниях процесса в заданные моменты времени.

Величина X^2 является мерой соответствия в том смысле, что ее большие значения означают плохое согласование прогнозируемых и наблюдаемых результатов, а малые значения – хорошее согласование. Соответственно, решение задачи идентификации сводится к вычислению тех интенсивностей переходов η_{ij} , которые обеспечивают минимальное значение суммы статистик Пирсона в те моменты времени, для которых имеются результаты наблюдений.

Способ идентификации свободных параметров, построенный на применении указанной меры соответствия, называется *методом минимума χ^2* [11]. Как показано в работе [11, с. 461–462], он даёт решения, практически совпадающие с оценками, полученными *методом максимального правдоподобия*. Согласно теореме Г. Крамера [11, с. 462–470], при выполнении условий

- 1) адекватности модели случайного процесса наблюдениям,
- 2) равенства единице суммы вероятностей пребывания в состояниях,
- 3) отделимости указанных вероятностей от нуля ($\tilde{p}^i > c^2 > 0$ при всех i),
- 4) существования непрерывных частных производных первого и второго порядков по идентифицируемым свободным параметрам от всех вероятностей пребывания в состояниях,
- 5) равенства числу свободных параметров ранга матрицы Якоби, составленной из частных производных первого порядка от вероятностей пребывания в состояниях по свободным параметрам,

рассмотренная задача идентификации при заданном объёме наблюдений имеет единственное решение, которое при неограниченном увеличении объёма наблюдений сходится по вероятности к искомому решению, а значения статистики X^2 , определяемые найденными значениями свободных параметров, асимптотически описываются распределением χ^2 с $M-\gamma-1$ степенями свободы, где γ – число определяемых значений свободных параметров.

Знание распределения позволяет использовать приведённую выше статистику для проверки гипотезы о том, что полученные прогнозируемые частоты попадания в состояния согласуются с результатами наблюдений. Очевидно, что использование этой статистики корректно только при выполнении указанных условий теоремы.

Если условия теоремы не выполнены, то вычисление приближений к оценкам максимального правдоподобия с использованием критерия X^2 остаётся возможным, однако полученное решение может быть не

единственным, а значения соответствующей статистики не обязаны быть распределены как χ^2 . Следует отметить, что одним из признаков нарушения условий теоремы является невыполнение неравенства $M > \gamma - 1$.

Поскольку для решения рассматриваемой задачи важны не сами оценки свободных параметров, а вычисляемые с их помощью функции $\tilde{p}^i(t)$, то неединственность таких оценок не создаёт никаких проблем, если разные наборы значений этих параметров приводят к вычислению одних и тех же вероятностных функций. Что касается невыполнения второго следствия теоремы, то для оценки степени соответствия результатов решения наблюдениям следует подобрать критерий, отличный от указанного выше.

Такой критерий строится далее на основе анализа регрессионной зависимости между наблюдаемыми и прогнозируемыми частотами пребывания в состояниях исследуемого случайного процесса в контрольные моменты времени. Для этого предположим, что наблюдаемые частоты выражаются через соответствующие прогнозируемые вероятности по упрощённой формуле гауссовской простой линейной регрессии:

$$F_k^i = a^i \tilde{p}_k^i + \varepsilon_k^i,$$

где F_k^i – наблюдаемая частота пребывания в i -м состоянии в k -й контрольный момент времени ($k = 1, \dots, K$), \tilde{p}_k^i и ε_k^i – соответствующие прогнозируемые вероятности и случайные ошибки, a^i – неизвестные параметры регрессии. Полагается, что случайные ошибки ε_k^i независимы и распределены по нормальному закону с нулевым средним значением и одинаковой для всех моментов времени k дисперсией. Оценки степени соответствия результатов решения наблюдениям обеспечиваются с помощью стандартных критериев, которые используются для проверки статистической значимости используемой регрессионной модели, а именно: критерия Стьюдента для проверки гипотез $a^i=0$ и F -критерия для проверки значимости уравнения регрессии. Кроме того, в ряде случаев можно дополнительно проверить, входит ли единица в 95%-й доверительный интервал для величины a^i/N . Если рассмотренная регрессионная модель статистически значима при заданном уровне α , а единица входит в указанный доверительный интервал, то можно говорить о приемлемой степени соответствия результатов решения наблюдениям.

Процедура вычисления оценок свободных параметров рассмотрена в разделе 1.2.3 и состоит из двух этапов. На подготовительном этапе с помощью электронной таблицы для рассматриваемой системы обыкновенных дифференциальных уравнений кодируется численная схема интегрирования, позволяющая вычислять вероятностные функции $\{\tilde{p}^n(t)\}_{n=1, \dots, M}$ с некоторым заданным временным шагом. На заключительном этапе запускается численная процедура многомерной нелинейной оптимизации. Значения параметров, полученные с её помощью, рассматриваются как характеристики математической модели, выявленные в результате наблюдений. Следует отметить, что рассмотренная процедура

обеспечивает решение *обратной задачи*, при котором вычисляются параметры системы дифференциальных уравнений, определяющей решение с заданными характеристиками.

Как правило, идентификация свободных параметров случайных процессов со структурой связей между состояниями, представленной на рис. 3.3, является сложной вычислительной задачей. Однако имеется эффективный приём, позволяющий упростить эту работу.

Для этого строки и столбцы состояний исходной сети могут быть объединены в сгруппированные состояния, а именно: нахождение в состоянии V_j ($j=1,2,\dots,q$) равносильно нахождению в одном из состояний $s_j, s_{j+q}, \dots, s_{j+(l-1)q}$, а нахождение в состоянии H_i ($i=1,2,\dots,l$) равносильно нахождению в одном из состояний $s_{(i-1)q+1}, s_{(i-1)q+2}, \dots, s_{iq}$ (рис. 3.4).

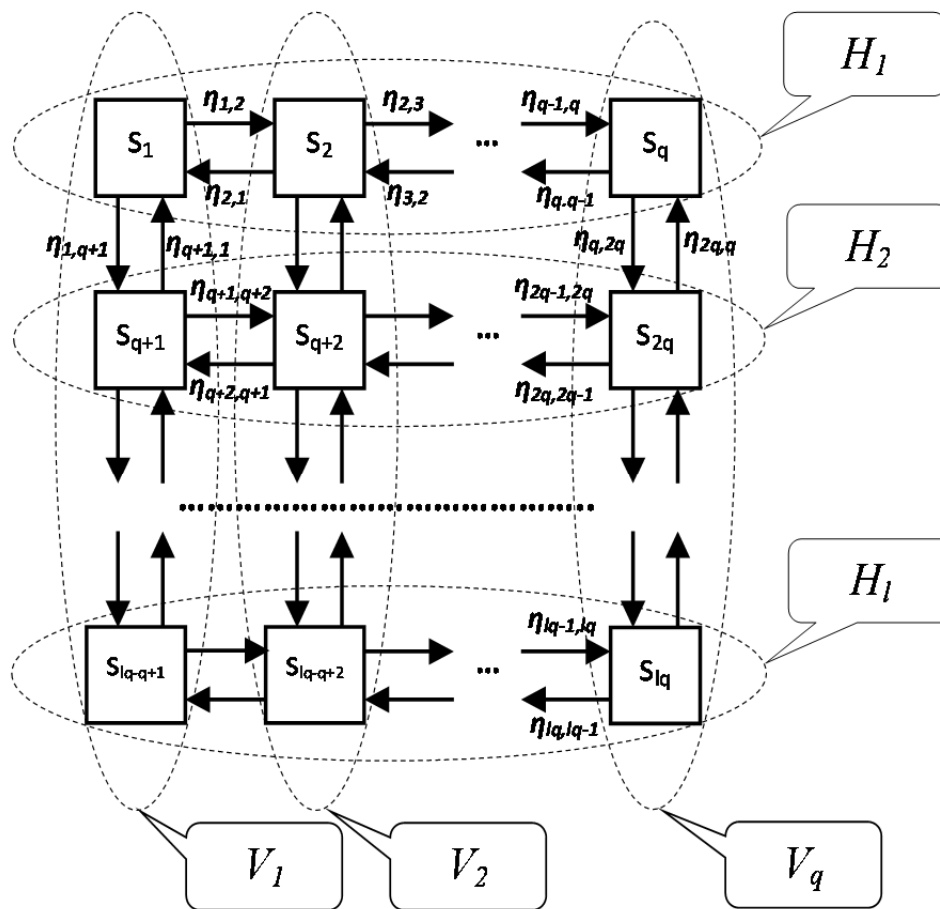


Рис. 3.4. Объединение состояний в группы.

Получаемые при этом графы состояний представлены на рис. 3.5 и 3.6.

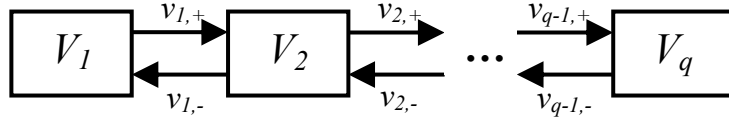


Рис. 3.5. Граф сгруппированных состояний (результат группировки столбцов).

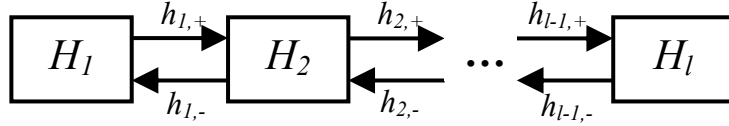


Рис. 3.6. Граф сгруппированных состояний (результат группировки строк).

Поскольку вероятность пребывания в каждом из сгруппированных состояний равна сумме вероятностей пребывания в составляющих его состояниях исходного случайного процесса, уравнения Колмогорова для вероятностей нахождения взора в сгруппированных состояниях получаются путём согласованного суммирования левых и правых частей всех уравнений (4), которые соответствуют ячейкам, формирующим данные состояния:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dp_V^1}{dt} = v_{1,-}p_V^2 - v_{1,+}p_V^1; \\ \dots \\ \frac{dp_V^i}{dt} = v_{i-1,+}p_V^{i-1} + v_{i,-}p_V^{i+1} - (v_{i,+} + v_{i-1,-})p_V^i \\ \quad (i = 2, 3, \dots, q-1); \\ \dots \\ \frac{dp_V^q}{dt} = v_{q-1,+}p_V^{q-1} - v_{q-1,-}p_V^q, \end{array} \right. \quad (5)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dp_H^1}{dt} = h_{1,-}p_H^2 - h_{1,+}p_H^1; \\ \dots \\ \frac{dp_H^i}{dt} = h_{i-1,+}p_H^{i-1} + h_{i,-}p_H^{i+1} - (h_{i,+} + h_{i-1,-})p_H^i \\ \quad (i = 2, 3, \dots, l-1); \\ \dots \\ \frac{dp_H^l}{dt} = h_{l-1,+}p_H^{l-1} - h_{l-1,-}p_H^l, \end{array} \right.$$

где

$$p_V^j = \sum_{k=1}^l \tilde{p}^{(k-1)q+j} \quad (j = 1, \dots, q), \quad p_H^j = \sum_{k=1}^q \tilde{p}^{(j-1)q+k} \quad (j = 1, \dots, l),$$

$$v_{j,+} = \sum_{k=1}^l \eta_{(k-1)q+j, (k-1)q+j+1} \quad (j = 1, \dots, q-1),$$

$$\begin{aligned}
v_{j,-} &= \sum_{k=1}^l \eta_{(k-1)q+j+1,(k-1)q+j} (j = 1, \dots, q-1), h_{j,+} \\
&= \sum_{k=1}^q \eta_{(j-1)q+k,jq+k} (j = 1, \dots, l-1), h_{j,-} \\
&= \sum_{k=1}^q \eta_{jq+k,(j-1)q+k} (j = 1, \dots, l-1).
\end{aligned}$$

Таким образом, исследование исходного случайного процесса, структура связей состояний которого определяется прямоугольной сеткой размерностью $l \times q$ (рис. 3.3), сводится к анализу двух процессов со сгруппированными состояниями, имеющих меньшую размерность (l или q) и упрощённую структуру связей (рис. 3.5 и 3.6). Интенсивности переходов между сгруппированными состояниями могут быть идентифицированы, как указано выше. Возврат к исходному процессу прост: полагая, что вероятности пребывания в вертикально и горизонтально расположенных группах состояний независимы, вероятность нахождения в состоянии, одновременно принадлежащего группам H_i и V_j , вычисляется как произведение вероятностей p_H^i и p_V^j пребывания в этих группах. Указанное предположение приводит к усреднению интенсивностей переходов вдоль заданных направлений в каждой из групп состояний и является приемлемым, если постановка задачи не предполагает определённых зависимостей между свободными параметрами. Представленный способ декомпозиции существенно упрощает анализ рассматриваемых систем.

Получив, как показано выше, аппроксимации распределений вероятностей пребывания взора на поверхности стимулов для различных категорий испытуемых $\omega \in \Omega$, можно определять вероятностные оценки принадлежности к заданным категориям ранее неидентифицированных лиц. Чтобы решить эту задачу, для каждого такого лица следует зарегистрировать траекторию движения взора по поверхности рабочего стимула $\mathbf{U}(t), t \in T$, и, используя заранее известные аппроксимации $\widehat{p}_\omega(\mathbf{u}, t | \mathbf{u}_0, t_0)$ указанных распределений, определить вероятностные оценки P_ω прохождения наблюдаемых траекторий. В общем случае для каждой категории ω при этом вычисляется криволинейный интеграл 1-го рода:

$$P_\omega = \int_{\mathbf{U}(t)} \ln \widehat{p}_\omega(\mathbf{u}, t | \mathbf{u}_0, t_0) du,$$

где du – бесконечно малый элемент длины траектории $\mathbf{U}(t)$. Испытуемый относится к категории ω_{max} с наибольшей вероятностной оценкой:

$$P_{\omega_{max}} = \max_{\omega \in \Omega} P_\omega.$$

На практике приведённые выше интегралы для вычисления P_ω заменяются своими численными оценками.

3.4. ЭТАПЫ ПОСТРОЕНИЯ И ПРИМЕНЕНИЯ КЛАССИФИКАТОРА

Обобщая изложенное выше, процедура построения и последующего применения вероятностного классификатора сводится к выполнению следующих шагов:

- 1) выбор стимула;
- 2) формирование обучающей выборки испытуемых и её разделение на группы;
- 3) сбор траекторий;
- 4) разметка стимула;
- 5) создание моделей;
- 6) разметка траекторий;
- 7) расчёт выборочных частот пребывания взора в зонах стимула для всех групп;
- 8) идентификация моделей для всех групп ;
- 9) выборка модельных данных в контрольные моменты времени;
- 10) разметка и классификация траектории взора тестируемого.

Этап выбора стимула

Стимульный материал следует подбирать так, чтобы были основания полагать, что он обладает дифференцирующей силой в рамках поставленной диагностической задачи. Желательно, чтобы стимульный материал способствовал тому, чтобы различия динамики взора испытуемых из разных выделенных групп были ярко выражены. Рекомендуется проводить предварительные исследования, результаты которых позволят выявить существование таких различий.

Этап формирования обучающей выборки испытуемых и её разделение на группы

Формирование обучающей выборки испытуемых, траектории взора которых необходимы для идентификации моделей, выполняется, исходя из требований прикладной диагностической задачи. В обучающую выборку следует включать испытуемых, обладающих разными уровнями диагностируемого фактора (например, навыка, способности, компетенции). Оценка уровня диагностируемого фактора должна производиться с помощью внешних объективных критериев. После того, как выборка составлена, её необходимо поделить на несколько групп по кластерному принципу, то есть в каждую группу должны входить испытуемые с одинаковым или близким уровнем диагностируемого фактора. Количество групп может определяться как по числу градаций диагностируемого фактора, так и в соответствии с требуемой точностью диагностики. После того, как выборка испытуемых разбита на группы, необходимо зафиксировать число полученных групп, определяющее число моделей для построения.

Этап сбора траекторий взора испытуемых из обучающей выборки

На этом этапе с помощью аппаратно-программных средств регистрации глазодвигательной активности проводится эксперимент, в процессе которого испытуемые изучают стимульный материал диагностической задачи, а их глазодвигательная активность фиксируется в виде фазовых траекторий взора в плоскости данного стимула.

Этап разметки стимула

Стимульный материал задачи следует разбить на пространственные зоны с помощью прямоугольной сетки: в исследуемой области стимула выделяются горизонтальные (и вертикальные) полосы равной высоты (ширины). Координаты полученных зон и их количество следует зафиксировать для дальнейшего использования на этапах создания моделей (число зон определяет число состояний моделей) и разметки траекторий (установления соответствия между точками траектории и зонами стимула). После разбиения полученные зоны именовываются, рассматриваясь впоследствии как возможные состояния процесса ГДА.

Этап создания моделей

Исходя из полученного разбиения стимульного материала на пространственные зоны, определяются количества вертикальных и горизонтальных зон. Эти количества задают число состояний каждой модели.

Количество создаваемых моделей равно удвоенному числу диагностируемых групп испытуемых (поскольку на описание динамики взора в одной группе требуется две модели, одна из которых описывает движение взора по вертикали, а другая – по горизонтали). Примеры разбиения поверхности стимула на пространственные зоны и соответствующих моделей приведены на соответствующих рисунках.

Этап разметки траекторий взора испытуемых из обучающей выборки

Каждая траектория взора испытуемого из обучающей выборки должна быть преобразована в последовательность состояний путём определения того, в какую пространственную зону испытуемый смотрел в каждый момент времени экспериментальной процедуры. При этом, если это не противоречит требованиям диагностической задачи, допустимо учитывать только некоторые относительные моменты времени экспериментальной процедуры, то есть использовать лишь часть записи, а также округлять временной шаг.

Моменты времени желательно выбирать так, чтобы для всех испытуемых из обучающей выборки в выбранные моменты времени присутствовали корректные данные о координате взора на плоскости стимула. Если для некоторых моментов времени этого добиться невозможно (например, когда в выбранный момент времени расчёт проекции взора на плоскость стимула прошёл неудачно, например, по причине моргания или ошибок распознавания), то такие некорректные наблюдения не включаются в

выборку, а размер выборки в эти моменты уменьшается на число некорректных наблюдений.

Этап расчёта выборочных частот пребывания взора испытуемых в зонах стимула

При наличии последовательности состояний взора каждого испытуемого из обучающей выборки становится возможным определить количество испытуемых, взор которых пребывал в каждом горизонтальном и вертикальном состоянии соответствующей модели в каждый момент времени, в результате чего формируется два временных ряда выборочных частот пребывания взора испытуемых в состояниях, необходимые далее для идентификации моделей.

Этап идентификации моделей

Используя временные ряды выборочных частот пребывания взора испытуемых в горизонтальных и вертикальных состояниях соответствующих моделей, следует идентифицировать модели путём решения обратной задачи для системы дифференциальных уравнений Колмогорова, минимизируя расхождение выборочных и прогнозируемых вероятностей пребывания в состояниях.

После идентификации моделей следует оценить их адекватность, пользуясь одним из статистических критериев, предложенных выше. Получив адекватные наблюдения модели, следует рассчитать модельные вероятности пребывания в ячейках стимула, перемножая модельные вероятности пребывания в соответствующих горизонтальных и вертикальных состояниях.

Этап выборки модельных данных в контрольные моменты времени

После идентификации моделей следует выбрать, какие из моментов времени могут служить в качестве контрольных, по которым будет производиться классификация. Как правило, рекомендуется выбирать те моменты времени, в которых обеспечивается наибольшая дифференциация вероятностей, соответствующих моделям различных диагностируемых групп.

Пользуясь данными идентифицированных моделей в выбранных контрольных точках, следует подготовить соответствующее количество матриц, содержащих модельные вероятности пребывания во всех производных состояниях (ячейках стимула). Одна матрица соответствует одной двумерной модели (см. рис. 3.2) и именуется аналогичным образом.

Число строк каждой матрицы равняется числу состояний двумерной модели (произведению числа горизонтальных и вертикальных зон стимула), а число столбцов – количеству контрольных моментов времени. Порядок строк и столбцов в различных матрицах должен соответствовать выбранному порядку производных состояний и выбранному порядку контрольных моментов времени и быть единым для всех матриц данных моделей. Другими словами, матрицы составляются так, чтобы обеспечить удобную

единообразную возможность определения вероятности пребывания в интересующем производном состоянии в заданный контрольный момент времени для любой модели.

Этап разметки и классификации траектории взора тестируемого

Траектория взора тестируемого должна быть преобразована в последовательность производных состояний, определяемых пересечением соответствующих горизонтальных и вертикальных зон стимула. Каждая точка траектории взора тестируемого преобразуется в наименование (или номер) той области (ячейки) стимула, которой она принадлежит.

После получения последовательности состояний тестируемого, из неё выбираются только те наименования (номера) производных состояний, которые соответствуют выбранным ранее контрольным временным точкам.

Затем из матриц каждой модели извлекаются оценки вероятностей, соответствующих по своей позиции каждому контрольному моменту времени и каждому наименованию (номеру) производного состояния, в котором пребывал взор тестируемого.

Далее для каждой модели вычисляются суммы натуральных логарифмов вероятностей полученных последовательностей, которые рассматриваются далее в качестве мер правдоподобия траектории в рамках той или иной модели. Классификация тестируемого происходит путём сравнения мер правдоподобия для различных моделей: испытуемому ставится в соответствие группа, модель которой является наиболее правдоподобной для наблюдаемой траектории взора тестируемого.

3.5. ПРИМЕР 1. ПРИМЕНЕНИЕ СЛОЖНЫХ МАРКОВСКИХ МОДЕЛЕЙ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ДИАГНОСТИКИ

3.5.1. Постановка задачи диагностики и этапы её решения

Полагается, что экипаж летательного аппарата выполняет на авиационном тренажёре определённое контрольное задание. При этом известна принадлежность экипажей к группам (категориям), отражающим уровень лётной подготовки. Полагая, что для каждой из этих групп доступна соответствующая выборка наблюдаемых траекторий движения взора командира воздушного судна (КВС) по поверхности приборной доски и окну кабины, фиксируемых через равные временные интервалы средствами видеоокулографии, ставится задача распознавания группы, к которой принадлежит вновь наблюдаемый экипаж. Полагается, что все члены экипажа в той или иной форме обеспечивают работу КВС, и его действия содержат достаточно информации для того, чтобы судить об уровне подготовки экипажа в целом. Классификация в указанной постановке обеспечивается решением рассмотренных далее следующих подзадач:

- разделения области движений взора, включающей поверхность приборной доски и окна кабины, на ячейки прямоугольной сетки, каждой из которых ставится в соответствие своё состояние марковской модели, в котором взор КВС может находиться с некоторой вероятностью, переходя из одного состояния в другое по определенным правилам;
- расчёта выборочных частот пребывания в состояниях марковской модели по выборке траекторий движения взора КВС для каждой диагностируемой группы экипажей в заданные моменты времени;
- идентификации (аппроксимации) временной динамики распределений вероятностей пребывания в состояниях марковской модели по полученным выборочным частотам для всех диагностируемых групп экипажей;
- расчёта и сравнения вероятностных оценок правдоподобия наблюдаемой траектории движения взора КВС, зарегистрированной для неидентифицированного экипажа, для каждой из заданных диагностируемых групп;
- выбора наиболее правдоподобной группы экипажей и оценки надёжности принятого решения.

Для описания того, как вероятности пребывания траектории движения взора в заданных дискретных состояниях изменяются с непрерывным временем, применяются двумерные сети Маркова (см. раздел 3.3.). По результатам накопленных наблюдений проводится прогнозирование указанных вероятностей с использованием параметрических математических моделей, описываемых *марковскими случайными процессами с дискретными состояниями и непрерывным временем.*

3.5.2. Контрольные упражнения, выполнявшиеся в ходе экспериментов

Упражнение E1 (рис. 3.7)

Описание: полёт по кругу, частичный отказ двигателя при наборе высоты, отказ путевого управления в районе первого разворота.



Рис.3.7. Пример кадра видеозаписи, зарегистрированного в ходе выполнения упражнения E1.

Упражнение E2 (рис. 3.8)

Описание: прерванный взлёт, отказ основной гидросистемы, отказ двигателя при разгоне до высоты 50 м, зима, снежный вихрь, нижняя граница облачности 100 м.



Рис.3.8. Пример кадра видеозаписи, зарегистрированного в ходе выполнения упражнения E2.

Упражнение E3 (рис. 3.9)

Описание: полёт по кругу, облачность, нижняя граница облачности - 100 м, снежный вихрь, ветер.



Рис. 3.9. Пример кадра видеозаписи, зарегистрированного в ходе выполнения упражнения E3.

Упражнение E4 (рис. 3.10)

Описание: полёт по кругу, зима, слабый снег, полёт в облаках, нижняя граница облачности - 100 м.



Рис. 3.10. Пример кадра видеозаписи, зарегистрированного в ходе выполнения упражнения E4.

Упражнение E5 (рис. 3.11)

Описание: заход по приборам на посадку, ночь, снежный вихрь, нижняя граница облачности – 100 м, высота - 200 м.



Рис. 3.11. Пример кадра видеозаписи, зарегистрированного в ходе выполнения упражнения Е5.

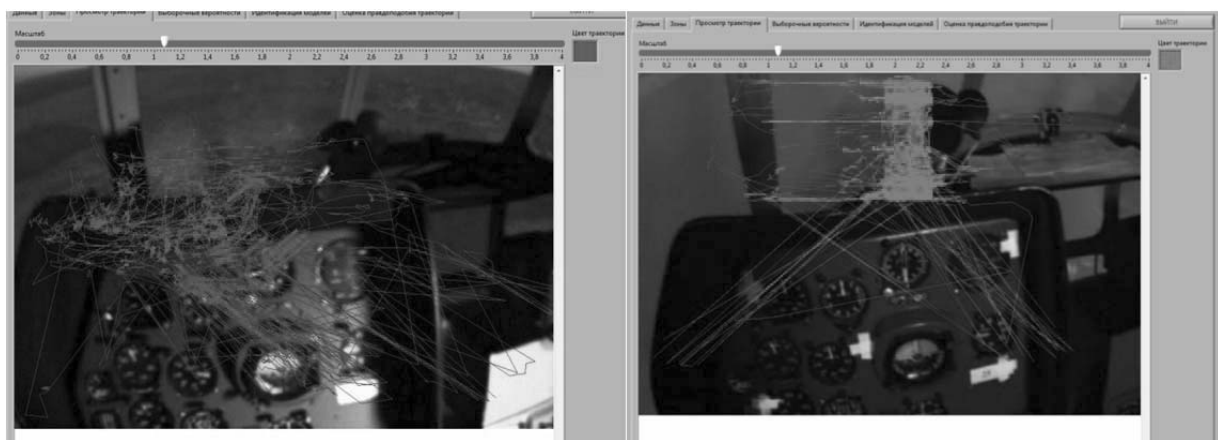
3.5.3. Результаты экспериментов

В качестве иллюстрации, на рис. 3.12 и 3.13 приведены траектории движения и идентифицированные распределения вероятностей пребывания взора в области, включающей поверхность приборной доски и окно кабины, при выполнении экипажами *C1-C4* упражнения *E5*. Запись движений глаз проводилась с помощью мобильной системы регистрации движений глаз *SMI iView X HED* в монокулярном режиме с частотой 50 Гц. Регистрирующие компоненты этой системы фиксировались на голове КВС и не стесняли движений. Регистрация данных проводилась без фиксации головы пилота. Калибровка выполнялась стандартным способом с использованием пяти опорных точек на приборной доске. Наблюдаемая сцена фиксировалась с помощью фронтальной видеокамеры.

Распределения вероятностей пребывания взора представлены для одних и тех же трёх контрольных моментов времени. Поскольку на рис. 3.12 траектории движения взора привязаны к одному и тому же фиксированному фону, а в процессе регистрации этих траекторий пилот поворачивал голову, то появились определённые незначительные (краткосрочные) смещения положений взора от областей приборной доски и стекла кабины, на которые действительно смотрел пилот. Эти смещения не влияют на результаты обработки данных, так как анализ движений взора проводится единообразно для всех экипажей в одной и той же системе координат, определяемой наблюдаемой испытуемым областью, без привязки данных к конкретным элементам приборной доски. В случае, если необходимо анализировать получаемые данные в какой-либо внешней системе координат (например, конкретной плоскости на приборной доске) и предполагается наличие

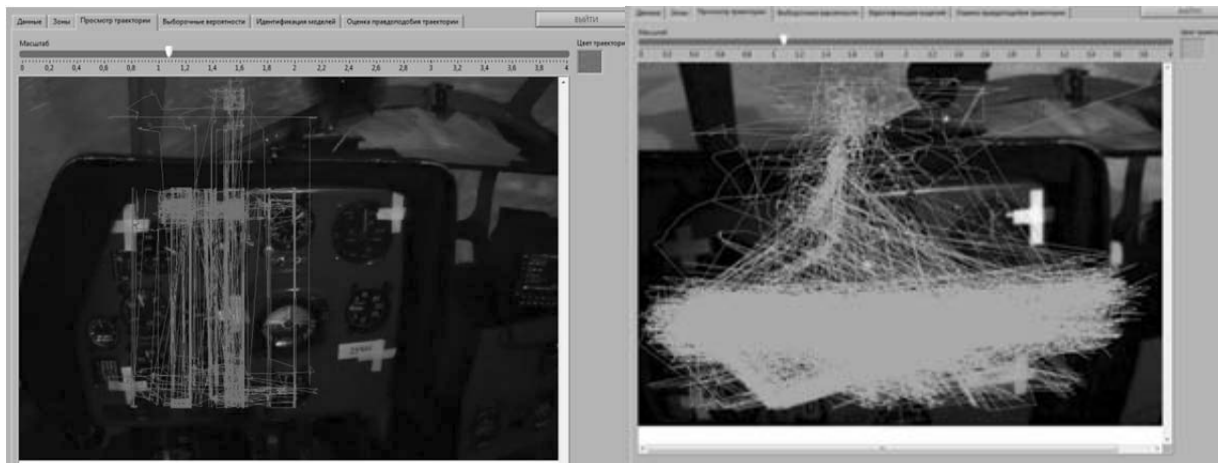
существенных искажений, связанных с постоянными вынужденными движениями головы испытуемого, рекомендуется воспользоваться одной из стратегий:

- использовать аппаратно-программный комплекс для видеорегистрации движений глаз, отслеживающий положение головы испытуемого и вносящий поправки в регистрируемые данные, соответствующие степени отклонения головы от позиции, в которой производилась калибровка оборудования;
- выполнять дополнительную обработку данных, предусматривающую распознавание в видеоряде фронтальной камеры положения специальных маркеров или неизменных элементов сцены и последующую коррекцию фиксируемых позиций взора.



(C1)

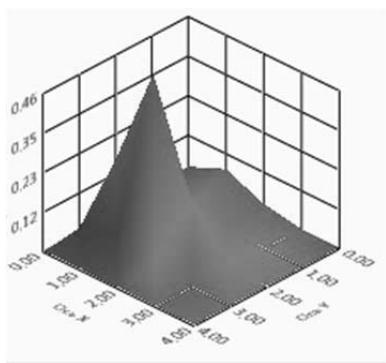
(C2)



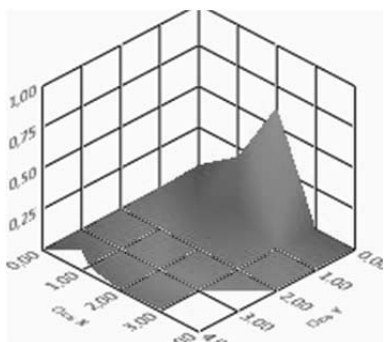
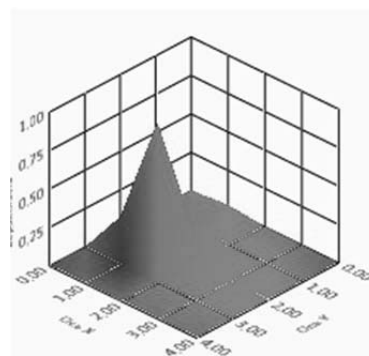
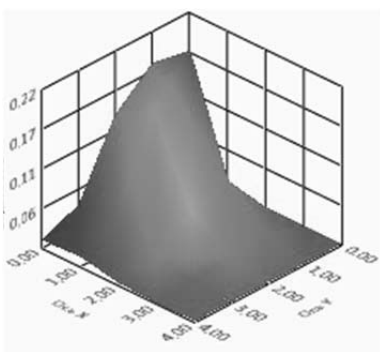
(C4)

(C3)

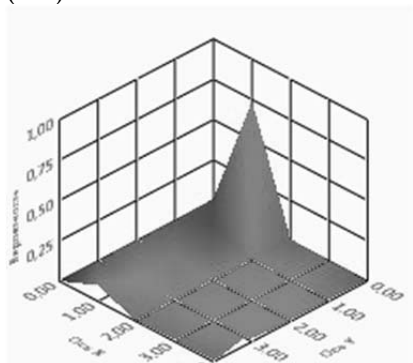
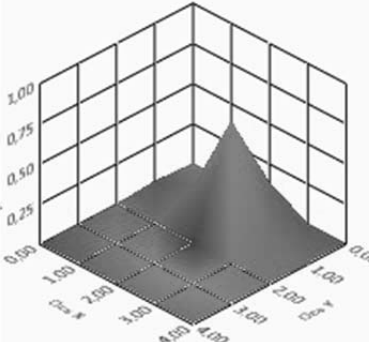
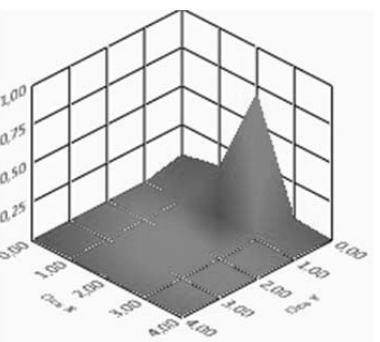
Рис. 3.12. Траектории движения взора по поверхности приборной доски и окну кабины при выполнении экипажами C1-C4 упражнения E5.



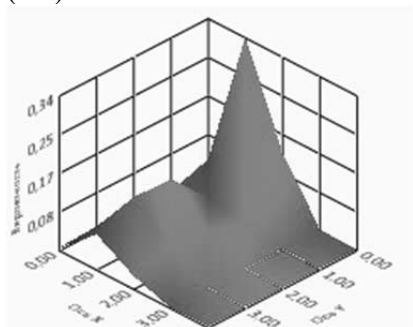
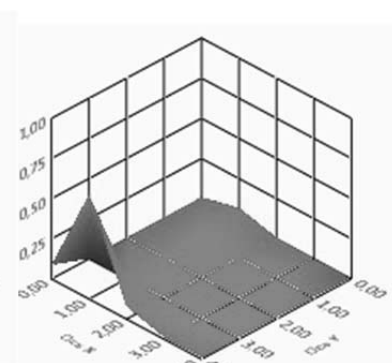
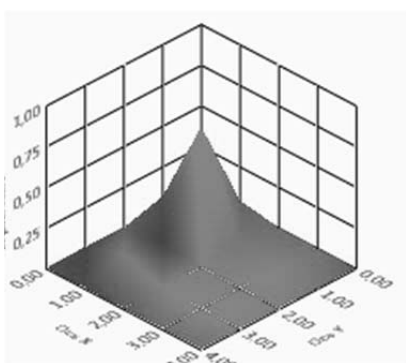
(C1)



(C2)



(C3)



(C4)

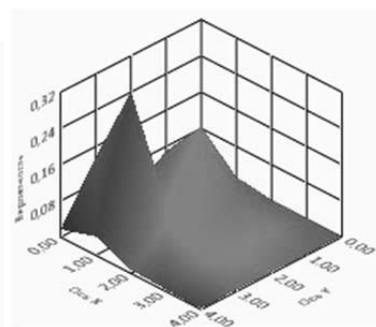
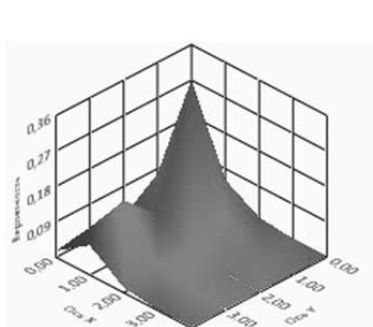


Рис. 3.13. Идентифицированные распределения вероятностей пребывания взора в области, включающей поверхность приборной доски и окно кабины, при выполнении экипажами С1-С4 упражнения Е5 для трёх контрольных моментов времени.

3.5.3. Классификация траекторий на основе оценок правдоподобия

Получив, как показано выше, аппроксимации распределений вероятностей пребывания взора в ячейках дискретизованной области для различных групп испытуемых $\omega \in \Omega$, можно определять вероятностные оценки принадлежности к заданным категориям ранее неидентифицированных лиц. Чтобы решить эту задачу, для каждого такого лица следует зарегистрировать траекторию движения взора по поверхности приборной доски и окну кабины $\mathbf{U}(t)$ и, используя заранее известные аппроксимации $\widehat{p}_\omega(\mathbf{u}, t | \mathbf{u}_0, t_0)$ указанных распределений, определить оценки правдоподобия P_ω прохождения наблюдаемых траекторий. В общем случае для каждой категории ω при этом вычисляется криволинейный интеграл 1-го рода:

$$P_\omega = \int_{\mathbf{U}(t)} \ln \widehat{p}_\omega(\mathbf{u}, t | \mathbf{u}_0, t_0) du,$$

где du – бесконечно малый элемент длины траектории $\mathbf{U}(t)$. Испытуемый относится к категории ω_{max} с наибольшей вероятностной оценкой:

$$P_{\omega_{max}} = \max_{\omega \in \Omega} P_\omega.$$

На практике приведённые выше интегралы для вычисления P_ω заменяются своими численными оценками.

В качестве иллюстрации, в таблице 3.1 представлены оценки правдоподобия P_ω траекторий движения взора КВС экипажа С1 для упражнений E1-E5. Во всех 5 случаях траектория, зарегистрированная в конкретном упражнении, оказывалась наиболее правдоподобной для модели, идентифицированной по данным этого же упражнения, что подтверждает корректность вычисленных оценок.

Таблица 3.1. Оценки правдоподобия траекторий движения взора КВС экипажа С1 для упражнений E1-E5, полученные по моделям, обученным на данных упражнений E1-E5

		Модель				
		E1	E2	E3	E4	E5
Траектория	E1	-126,138	-162,984	-209,016	-228,157	-276,688
	E2	-204,266	-122,373	-175,239	-251,365	-222,686
	E3	-155,088	-153,128	-116,418	-269,201	-229,436
	E4	-159,787	-156,939	-169,511	-117,716	-173,093
	E5	-213,87	-200,727	-237,136	-222,94	-179,962

3.5.4. Диагностический критерий на основе вероятностных моделей и интегральных оценок их параметров

Как указано во введении, анализ простейших показателей окулomotorной активности, связанных с саккадами и фиксациями, а также карт распределения внимания («тепловых карт») в их традиционной форме, как и многих других характеристик, распространённых в айтрекинг-исследованиях, может не дать надёжной дифференциации, необходимой для построения диагностических оценок. Подход, использующий зависящие от времени вероятностные распределения позиции взора и оценки правдоподобия, такую дифференциацию обеспечивает, однако требует накопления значительного объёма экспериментальных данных, необходимых для надёжной идентификации параметров распределений, что затрудняет его практическое применение.

В этом разделе представлен иной подход, опирающийся на интегральные оценки параметров рассмотренных ранее вероятностных моделей. Его преимуществами являются:

- отсутствие жёсткой привязки к пространственному расположению приборов, находящихся в поле зрения пилота, и, соответственно, к типу летательного аппарата;
- меньший объём экспериментальных данных, необходимых для корректной диагностики;
- невысокие требования к точности регистрации траектории движения взора, что существенно при проведении экспериментов и диагностических процедур в «полевых» условиях.

Основными диагностическими характеристиками являются идентифицированные оценки наибольших интенсивностей переходов между состояниями двумерных марковских моделей, рассмотренных в предыдущем разделе, в вертикальном и горизонтальном направлениях. Этот выбор обусловлен:

- выявленными в результате экспериментов зависимостями продолжительностей и частот фиксаций взора от опыта испытуемых в решении поставленной задачи и наличия у них затруднений при переработке информации [9];
- зависимостями продолжительности, скорости и частоты саккад от присутствия психиатрических и нейрофизиологических расстройств у испытуемых и приёма ими медикаментов и алкоголя [9].

Поскольку область движения взора, охватывающая приборную доску и стекло кабины, ограничена, то интенсивности переходов «вправо-влево» и «вверх-вниз» должны иметь, как правило, сопоставимые наибольшие интенсивности переходов между состояниями в противоположных направлениях, что подтверждается результатами обработки полученных данных. В противном случае взор сместится на границу данной области, что в экспериментах не наблюдалось. Таким образом, направление,

соответствующее наибольшей интенсивности переходов, существенного значения не имеет.

Связь указанной характеристики со степенью сформированности навыков пилотирования и психофизиологическим состоянием пилотов очевидна, поскольку неудовлетворительные показатели, обусловленные указанными факторами, приводят к увеличению продолжительности фиксаций взора на приборах, затруднениям в переработке считываемой с них информации и увеличению продолжительности саккад [9]. Учитывая быстро изменяющуюся окружающую обстановку, неподготовленный пилот вынужден, не получив и не осмыслив должным образом необходимые данные с одного прибора или объекта за стеклом кабины, переводить взгляд на другой прибор или внешний объект, а затем возвращаться обратно, чтобы продолжить считывание и обработку недополученной информации. Такой «возвратный» характер движения взора очевидным образом способствует увеличению интенсивностей переходов между состояниями представленных выше марковских моделей.

Как показали расчёты, использование усреднённых интенсивностей переходов между состояниями рассматриваемых моделей в качестве основных диагностических характеристик также является допустимым, однако этот подход приводит к существенно худшей дифференциации между экипажами разной квалификации и поэтому далее не применяется.

На рис. 3.14 представлены диаграммы, показывающие соотношения наибольших интенсивностей переходов между состояниями двумерных марковских моделей в вертикальном и горизонтальном направлениях, соответствующих пяти контрольным временным периодам наблюдений. Данные, на основе которых построены оценки этих характеристик, получены при выполнении лётного упражнения *E5* для четырёх экипажей разной квалификации, принимавших участие в экспериментах. Диаграммы демонстрируют очевидную тенденцию к уменьшению приведённых интенсивностей с повышением уровня квалификации экипажа.

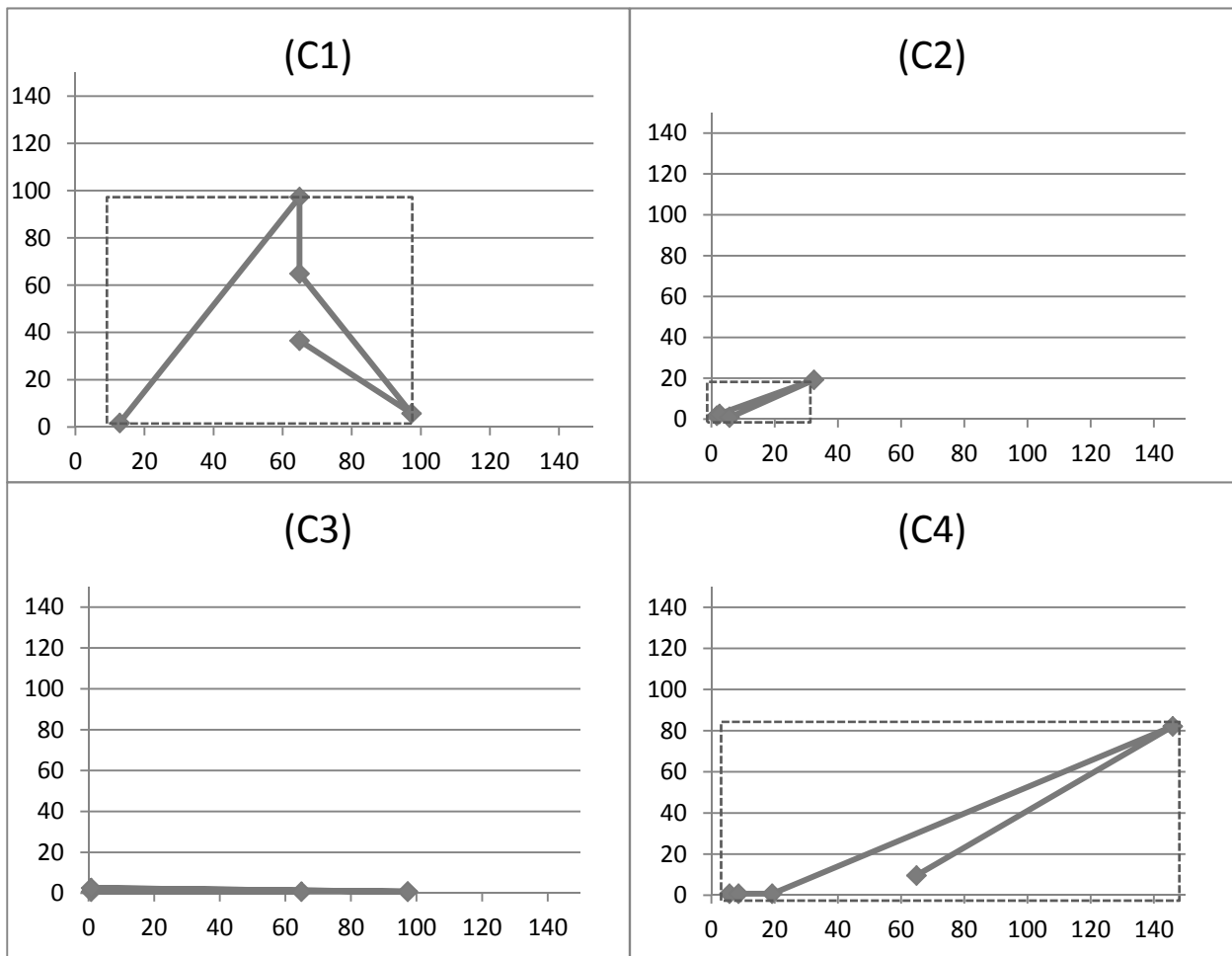


Рис. 3.14. Наибольшие интенсивности переходов между состояниями двумерных марковских моделей в вертикальном и горизонтальном направлениях, соответствующие пяти контрольным временным периодам наблюдений при выполнении лётного упражнения Е5 для четырёх экипажей разной квалификации. Каждый период наблюдений представлен точкой, координаты которой вдоль осей абсцисс и ординат представляют интенсивности переходов в вертикальном и горизонтальном направлениях, соответственно. Экипажи (С2) и (С3) имеют высокую лётную квалификацию, а экипажи (С1) и (С4) – среднюю лётную квалификацию. Площади обозначенных пунктиром прямоугольников, в которые вписаны ломаные, представляют значения интегрального показателя, применяющегося для оценки степени подготовленности экипажей.

Поскольку вертикальное и горизонтальное направления практически равноценны при принятии диагностических решений, соответствующие им наибольшие интенсивности переходов целесообразно преобразовать в единый интегральный показатель, удобный для формулировки правила, разделяющего подготовленные и неподготовленные экипажи. Проведённые вычислительные эксперименты с различными видами комбинаций указанных величин выявили, что наибольшую дифференциацию обеспечивает произведение наибольших интенсивностей переходов в вертикальном и горизонтальном направлениях. Графически эта характеристика представляется площадями прямоугольников, в которые вписаны ломаные, приведённые на рис. 3.14. Значения этой величины для различных экипажей и контрольных лётных упражнений в сопоставлении показаны на рис. 3.15.

Как видно из рис. 3.15, упражнение *E5* (заход ночью по приборам на посадку) обеспечивает наиболее надёжную дифференциацию экипажей по уровню их лётной квалификации.

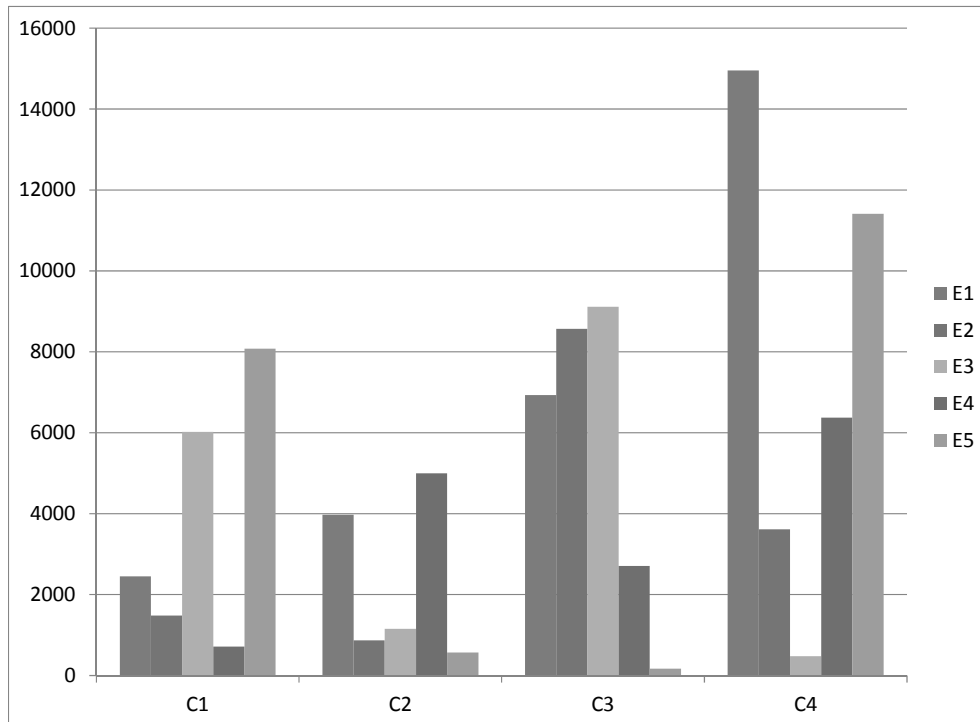


Рис. 3.15. Значения интегрального показателя для оценки степени подготовленности экипажей C1-C4 при выполнении контрольных упражнений E1-E5 (см. приложение).

Учитывая разную значимость выполненных контрольных упражнений для оценки лётной квалификации, целесообразно построить сумму соответствующих этим упражнениям интегральных показателей K_i , умноженных на выявленные путём экспертных оценок эмпирические весовые коэффициенты ω_i , и использовать для оценки лётной квалификации пороговые значения полученного итогового критерия K_Σ по серии упражнений:

$$K_\Sigma = \sum_i \omega_i K_i .$$

В качестве примера, значения итогового критерия K_Σ по серии упражнений *E1-E5* приведены на рис. 3.16. Пороговое значение, равное 3000, отделяет экипажи с высокой и средней квалификацией.

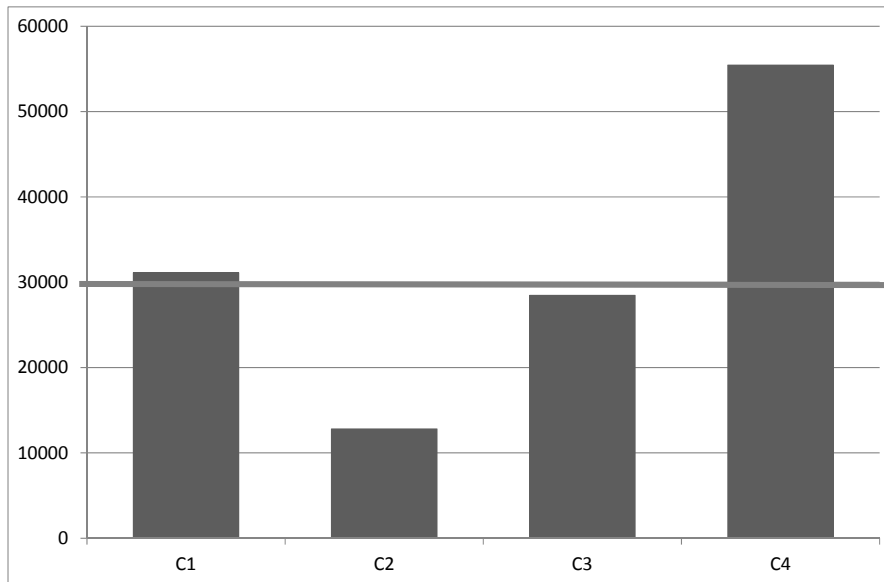


Рис. 3.16. Значения итогового показателя K_{Σ} по серии упражнений E1-E5 ($\omega_1 = 1,1$; $\omega_2 = \omega_3 = \omega_4 = 1$; $\omega_5 = 2,5$).

Альтернативой оценке лётной квалификации на основе итогового показателя K_{Σ} является классификация экипажей с помощью вероятностных нейронных сетей (рис. 3.17).

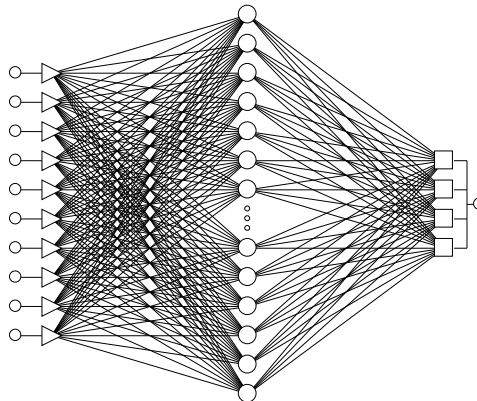


Рис. 3.17. Структура вероятностной нейронной сети для классификации экипажей.

На вход распознающей сети подаются упорядоченные наборы наибольших интенсивностей переходов между состояниями марковских моделей в вертикальном и горизонтальном направлениях для заданных контрольных временных периодов наблюдений. Каждому обучающему наблюдению во внутреннем слое сети соответствует один элемент на радиальных базисных функциях (радиальный элемент), функция активации которого представляет собой функцию Гаусса с центром в данном наблюдении.

Каждой распознаваемой группе экипажей соответствует свой элемент в выходном слое, соединенный со всеми радиальными элементами, относящимися к этой группе и не имеющий соединения с остальными

радиальными элементами. Указанный выходной элемент складывает выходные сигналы всех элементов, принадлежащих его группе. Значения выходных сигналов элементов последнего слоя считаются пропорциональными вероятностям принадлежности соответствующим группам. После их нормировки получаются окончательные оценки вероятностей принадлежности заданным группам.

Число элементов во внутреннем слое определяется числом наблюдений, а число элементов в выходном слое – числом распознаваемых групп. Вероятностная нейронная сеть не требует обучения и может динамически пополняться новыми радиальными элементами по мере накопления наблюдений. Этот тип нейронных сетей позволяет обеспечить решение задачи классификации при предельно малых объёмах наблюдений. Если накопленные данные репрезентативны, то надёжность распознавания возрастает с ростом их числа.

Как правило, целесообразно иметь свою распознающую вероятностную нейронную сеть для каждого контрольного упражнения.

В целом, представленные в этом разделе экспериментальные и расчётные результаты позволяют говорить об эффективности рассмотренного подхода и возможности построения на его основе автоматизированных диагностических средств оценки уровня подготовки лётного состава по результатам работы на авиационных тренажёрах [21-23, 25, 57, 58].

3.6. ПРИМЕР 2. ПРИМЕНЕНИЕ СЛОЖНЫХ МАРКОВСКИХ МОДЕЛЕЙ ДЛЯ АНАЛИЗА ПСИХОЛОГИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК

3.6.1. Особенности построения двухфакторной сети Маркова для исследования эволюции вербального и невербального показателей интеллектов

Сравнительное исследование эволюции разнотипных показателей интеллекта представляет большой интерес для специалистов в области психологии и педагогики, поскольку позволяет выявлять скрытые закономерности развития личности, формируя основания для обоснованного выбора наиболее подходящих методик обучения и воспитания. Актуальность этой проблемы обусловлена тем, что к настоящему времени накоплено большое число методик подобного рода, многие из которых содержат противоречивые рекомендации.

Используемая модель эволюции [14], структура которой рассмотрена в разделе 3.3, представляет взаимодействие двух факторов: вербального и невербального интеллектов. Строки состояний соответствуют диапазонам возможных значений показателя вербального интеллекта, а столбцы –

невербального. В частности, при длине диапазона, составляющей 5 единиц интеллекта, объединенное состояние S_{1*} соответствует диапазону 65..69 единиц, состояние S_{2*} - 70..74 единиц, а состояние S_{20*} - 160..164 единиц. Поскольку способность к обучению зависит от уровня интеллекта, то естественно полагать, что интенсивности переходов не являются одинаковыми для различных уровней показателя интеллекта (в дальнейшем это будет подтверждено расчетами).

Поскольку величины, формируемые в результате воздействия большого числа независимых элементарных факторов, ни один из которых не доминирует, могут рассматриваться как асимптотически нормальные, то наблюдаемые распределения значений таких характеристик (к их числу относятся и показатели интеллекта) в момент рождения³⁴ и в другие контрольные моменты времени приблизительно нормальны. Среднее значение и среднеквадратическое отклонение для каждого рассматриваемого показателя интеллекта в момент рождения (точка $t=0$) характеризует соответствующее начальное распределение.

После рассмотренной в разделе 3.3 декомпозиции исходной двухфакторной системы на две однофакторные, оценка систематических воздействий на интеллект сводится к вычислению средних значений и среднеквадратических отклонений для каждого типа его показателя в момент рождения, а также к вычислению интенсивностей переходов. В качестве оценок этих параметров используются значения, обеспечивающие наилучшее соответствие наблюдаемых и прогнозируемых частот попадания в состояния модели в контрольные моменты времени (см. раздел 3.3). Эти оценки рассматриваются как характеристики систематических воздействий, проявившиеся в период наблюдений. Нормальность распределений показателей интеллекта в контрольные моменты времени выступает в роли дополнительного ограничения при определении значений интенсивностей переходов.

Чтобы в случае нормально распределенных характеристик избежать подгонки модели к возмущениям, обусловленным ошибками выборки, свободные параметры модели следует определять как функции средних значений и среднеквадратических отклонений соответствующих нормальных распределений. Выполняемое сглаживание наблюдаемых гистограмм снижает зависимость конечных результатов от ошибок, обусловленных ограниченностью выборки.

3.6.2. Результаты расчетов

³⁴ Под значениями показателя интеллекта в момент рождения понимаются соответствующие экстраполируемые значения этой характеристики. Показатели интеллекта новорожденных рассматриваются как гипотетические характеристики, определяющие будущие способности детей.

Исследованная выборка включала 131 ребенка. Все дети посещали обычные российские школы и были воспитаны в русскоязычных семьях, принадлежащих преимущественно к среднему классу. Выборка состояла из добровольцев, числящихся в Московской городской популяционной базе, собранной лабораторией возрастной психогенетики Психологического института Российской Академии образования [14]. Дети проходили тестирование по адаптированной в России детской шкале интеллекта Векслера (*WISC*), используемой для диагностики когнитивной способности детей в возрасте 5-16 лет и состоящей из 12 субтестов. Шесть субтестов служат для оценки вербального интеллекта, а шесть других – невербального. Подсчитывались общие показатели вербального (*VIQ*) и невербального (*PIQ*) интеллектов. Измерения выполнялись дважды: в возрасте 13 и 16 лет. Учитывая ряд особенностей тестирования в условиях столичной популяции, *при анализе результатов полагалось, что средний уровень развития ребенка соответствует показателю интеллекта, равному 110.*

Исследовался диапазон значений показателей от 60 до 160. Двухфакторная сеть Маркова представляла собой структуру из 20×20 состояний. Прогнозируемые частоты попаданий в эти состояния сопоставлялись с наблюдаемыми частотами во временных точках, соответствующих 13- и 16-летнему возрасту.

Критерий Пирсона показал отсутствие значимых различий между наблюдаемыми частотами попадания в выбранные диапазоны показателей вербального и невербального интеллектов и соответствующими частотами нормальных распределений (*VIQ*: $\chi^2_{17}=16,9$, $p=0,46$ для выборки 13-летних и $\chi^2_{17}=6,7$, $p=0,99$ для 16-летних; *PIQ*: $\chi^2_{17}=18,0$, $p=0,39$ для выборки 13-летних и $\chi^2_{17}=26,2$, $p=0,07$ для 16-летних). Следовательно, отвергать гипотезу о нормальности результатов наблюдений оснований нет.

F-тест показал наличие значимых различий между дисперсиями для контрольных возрастов ($p<0,001$), а критерий Стьюдента - высоко значимые отличия для соответствующих средних значений ($p<0,005$). Это влечет необходимость использования в последующих вычислениях различных свободных параметров для указанных величин.

Стандартные отклонения показателей интеллекта в контрольных точках в 15-20 раз превышают значения аналогичных экстраполируемых характеристик в момент рождения, что свидетельствует о значимости систематических и случайных воздействий на популяцию.

Между вербальным и невербальным интеллектом существуют высокосвязанные корреляционные связи (корреляция по Пирсону составляет 0,57 в 13 лет и 0,58 в 14 лет, $p<0,001$).

Для каждой производной однофакторной сети с объединенными состояниями, сумма мер соответствия для возрастов 13 и 16 лет минимизировалась путем выбора следующих свободных параметров:

- интенсивностей переходов для диапазона 0-13 лет;
- интенсивностей переходов для диапазона 13-16 лет;

- средних значений и среднеквадратических отклонений гипотетического распределения показателя интеллекта в момент рождения.

Чтобы разумно сочетать сложность модели и степень детализации исследования, необходимо использовать наименьшее число свободных параметров, обеспечивающее приемлемое согласование прогноза и наблюдений. Для определения этого числа сравнивались три модели разной сложности. В первой модели интенсивности переходов полагались равными для диапазонов 60-84, 85-109, 110-134, 135-160 единиц показателя интеллекта (естественно предполагать, что интенсивности переходов не изменяются слишком быстро с ростом этой характеристики). Во второй модели диапазоны постоянства шире: 60-109 и 110-160. В третьей модели интенсивности переходов не зависели от значений показателя интеллекта. Оценки согласования идентифицированных моделей с результатами наблюдений³⁵ за показателями вербального интеллекта представлены в таблице 3.2.

Таблица 3.2. Модели с разной степенью детализации зависимости интенсивностей переходов от показателя вербального интеллекта: согласование с результатами наблюдений.

№	Модель	Мера согласования с результатами наблюдений (VIQ)	Примечания
1	Интенсивности переходов равны для диапазонов 60-84, 85-109, 110-134, 135-160 единиц IQ	$\chi^2_{20}=23,24, p=0,28$	Статистически значимых различий с результатами наблюдений нет
2	Интенсивности переходов равны для диапазонов 60-110, 110-160 единиц IQ	$\chi^2_{32}=51,08, p=0,02$	Есть статистически значимые различия с результатами наблюдений
3	Интенсивности переходов равны для всех диапазонов IQ	$\chi^2_{35}=58,48, p=0,01$	Есть статистически значимые различия с результатами наблюдений

Несоответствие второй и третьей модели с результатами наблюдений ($p < 0,05$), позволила сделать вывод о наличии значимой связи между степенью изменчивости вербального интеллекта, характеризуемой интенсивностями переходов между состояниями марковской сети, и его

³⁵ С исходными результатами наблюдений, а не частотами идентифицированного нормального распределения.

уровнем. Для последующего анализа была выбрана наиболее адекватная наблюдениям первая модель ($p=0,28$).

Аналогичные оценки, сделанные для показателя невербального интеллекта, демонстрируют наличие статистически значимых различий с результатами наблюдений для всех трех моделей, которое обусловлено, в первую очередь, относительно слабой согласованностью наблюдаемых частот с нормальным распределением в 16-летнем возрасте ($p=0,07$)³⁶. Однако и для этого показателя имеет место значимое ухудшение согласования при переходе к более грубым моделям.

Наблюдаемые и прогнозируемые вероятности нахождения в различных состояниях этой модели для контрольных возрастов показаны на рис. 3.18-3.21.

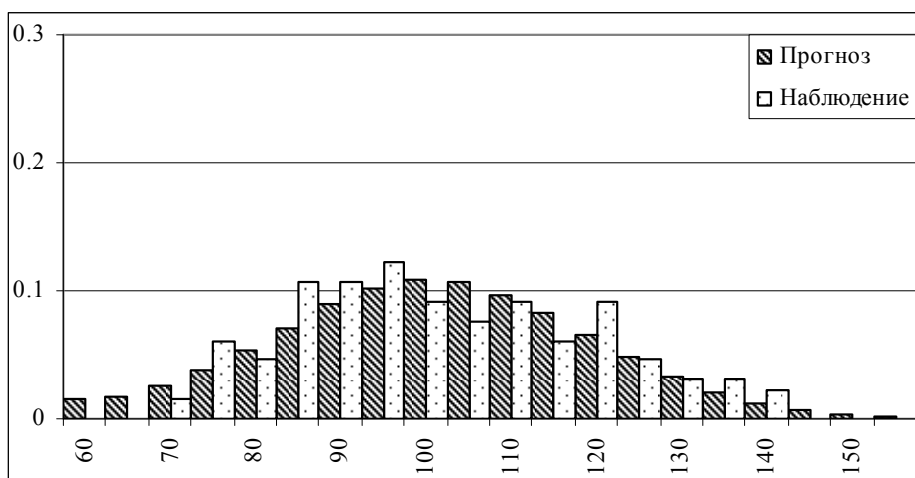


Рис. 3.18. Наблюдаемые и прогнозируемые вероятности нахождения в различных состояниях: вербальный интеллект, 13 лет.

³⁶ Характер исследуемой величины позволяет говорить о нормальности ее распределения. Это утверждение опирается на центральную предельную теорему теории вероятностей и подтверждаемый психологической практикой факт воздействия большого числа сопоставимых по влиянию факторов на характеристики типа показателя невербального интеллекта. Полученное слабое согласование наблюдаемых частот с нормальным распределением в 16-летнем возрасте, очевидно, является артефактом, устранимым при увеличении объема выборки.

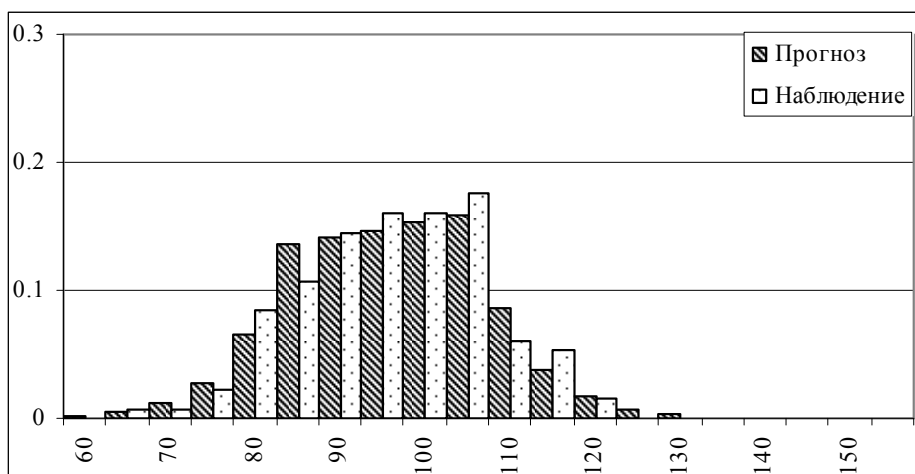


Рис. 3.19. Наблюдаемые и прогнозируемые вероятности нахождения в различных состояниях: вербальный интеллект, 16 лет.

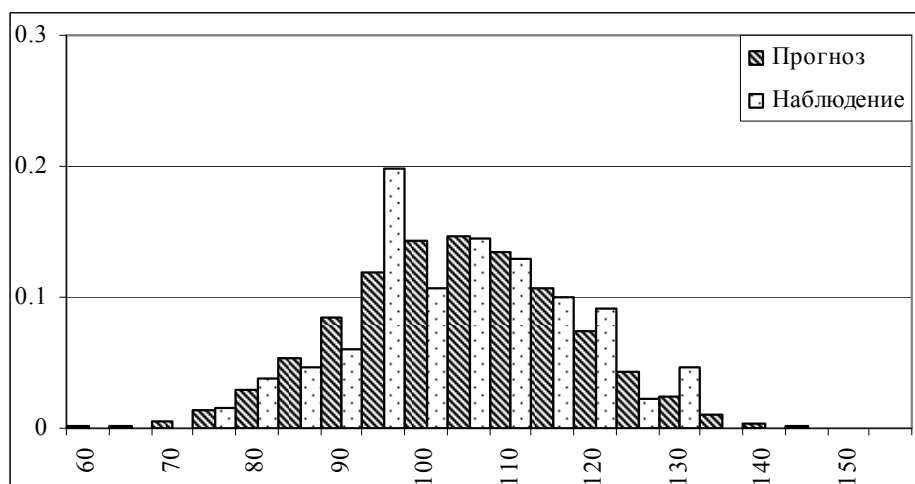


Рис. 3.20. Наблюдаемые и прогнозируемые вероятности нахождения в различных состояниях: невербальный интеллект, 13 лет.

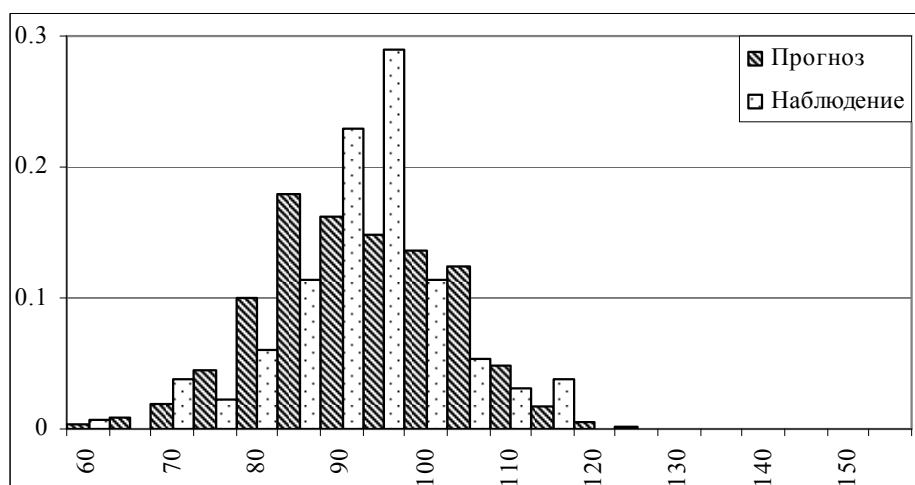


Рис. 3.21. Наблюдаемые и прогнозируемые вероятности нахождения в различных состояниях: невербальный интеллект, 16 лет.

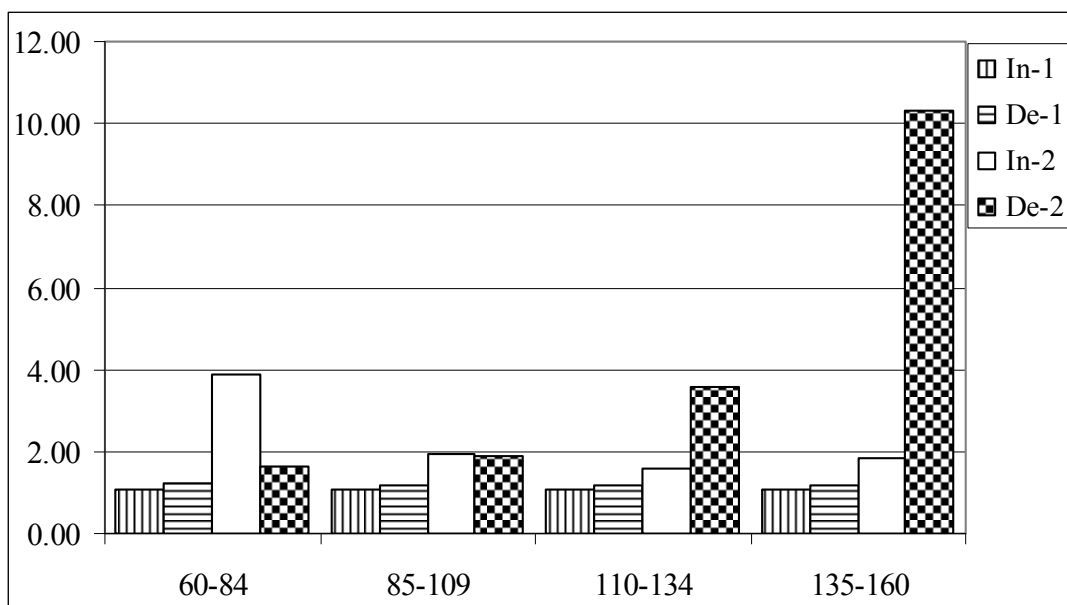


Рис. 3.22. Интенсивности переходов для производных однофакторных моделей: вербальный интеллект (**In** - интенсивности переходов в сторону увеличения *IQ*; **De** – интенсивности переходов в сторону уменьшения *IQ*; **1** - в период от 0 до 13 лет; **2** - в период от 13 до 16 лет).

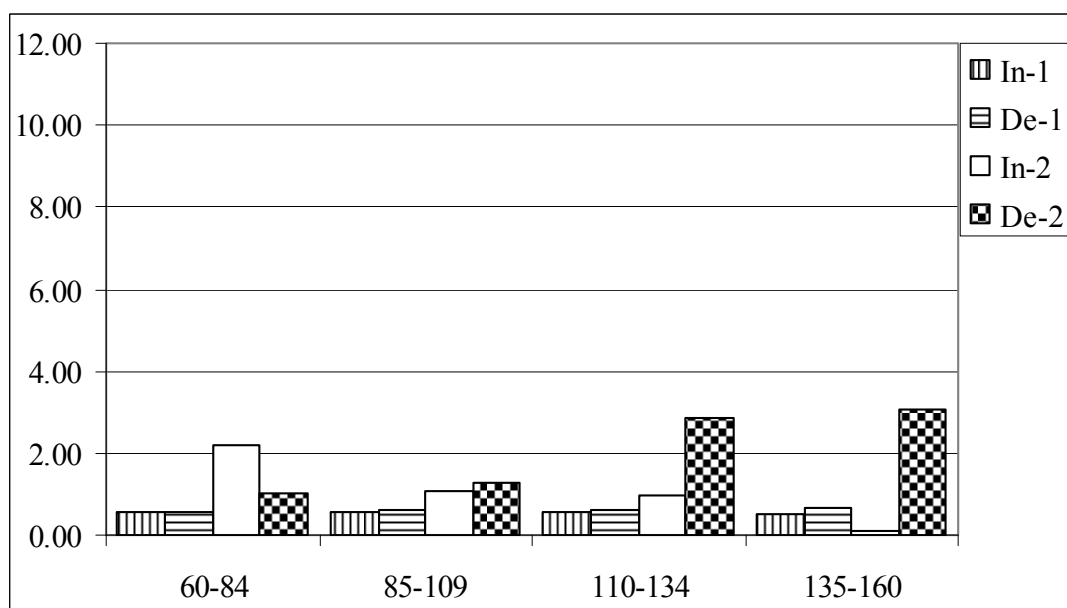


Рис. 3.23. Интенсивности переходов для производных однофакторных моделей: невербальный интеллект (**In**-интенсивности переходов в сторону увеличения *IQ*; **De**– интенсивности переходов в сторону уменьшения *IQ*; **1** - в период от 0 до 13 лет; **2** - в период от 13 до 16 лет).

На рис. 3.22 и 3.23 представлены полученные оценки интенсивностей переходов для производных однофакторных моделей, определяющие эволюцию вербального и невербального интеллектов. Для тех же моделей на

рис. 3.24 и 3.25 показаны огибающие распределений прогнозируемых вероятностей в момент рождения и в контрольные моменты времени. На рис. 3.26-3.38 приведены диаграммы, отражающие эволюцию распределений вероятностей пребывания в группах состояний двухфакторной модели в контрольные моменты времени (13 и 16 лет) и в 7-летнем возрасте (экстраполированные значения).

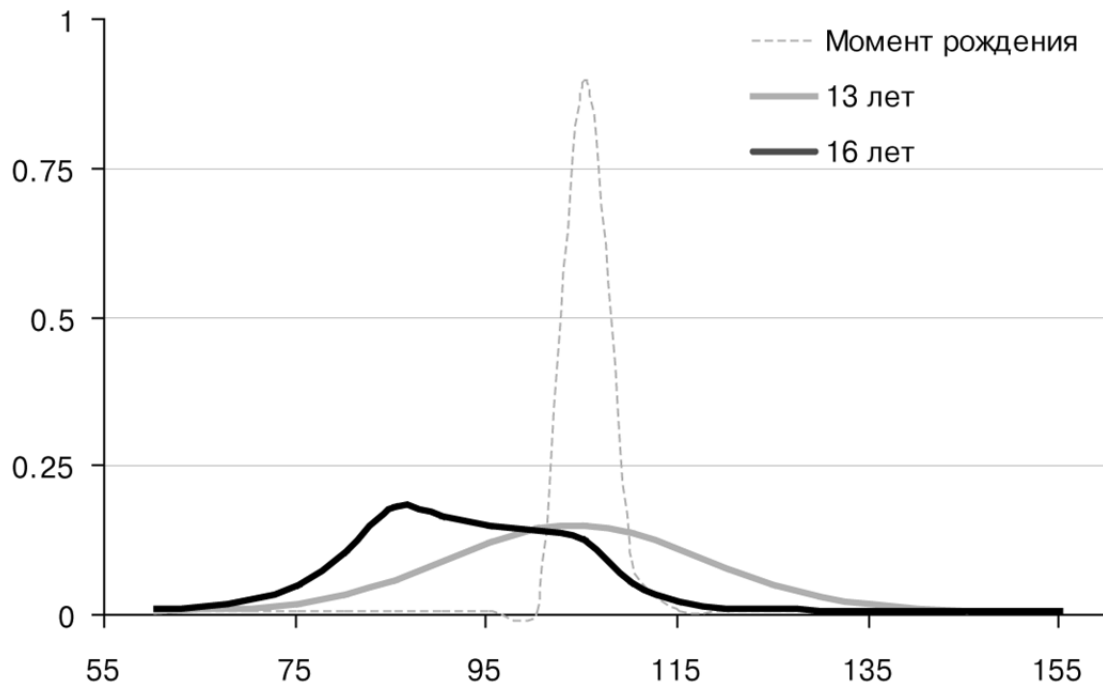


Рис. 3.24. Огибающие распределений невербального интеллекта прогнозируемых вероятностей в момент рождения и в контрольные моменты времени.

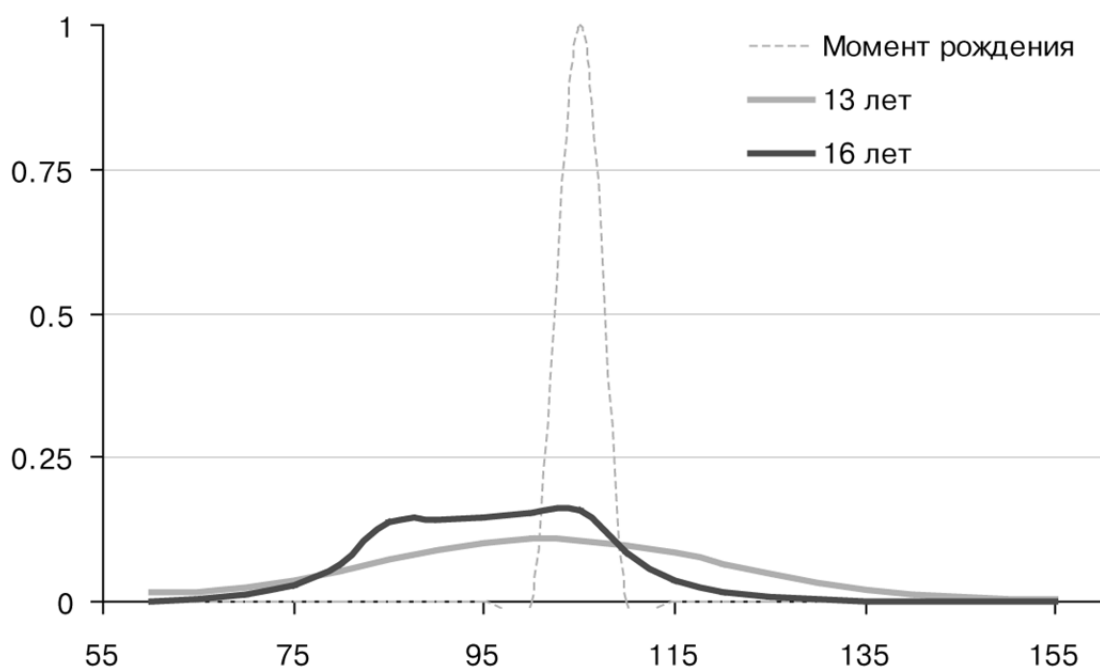


Рис. 3.25. Огибающие распределений вербального интеллекта прогнозируемых вероятностей в момент рождения и в контрольные моменты времени.

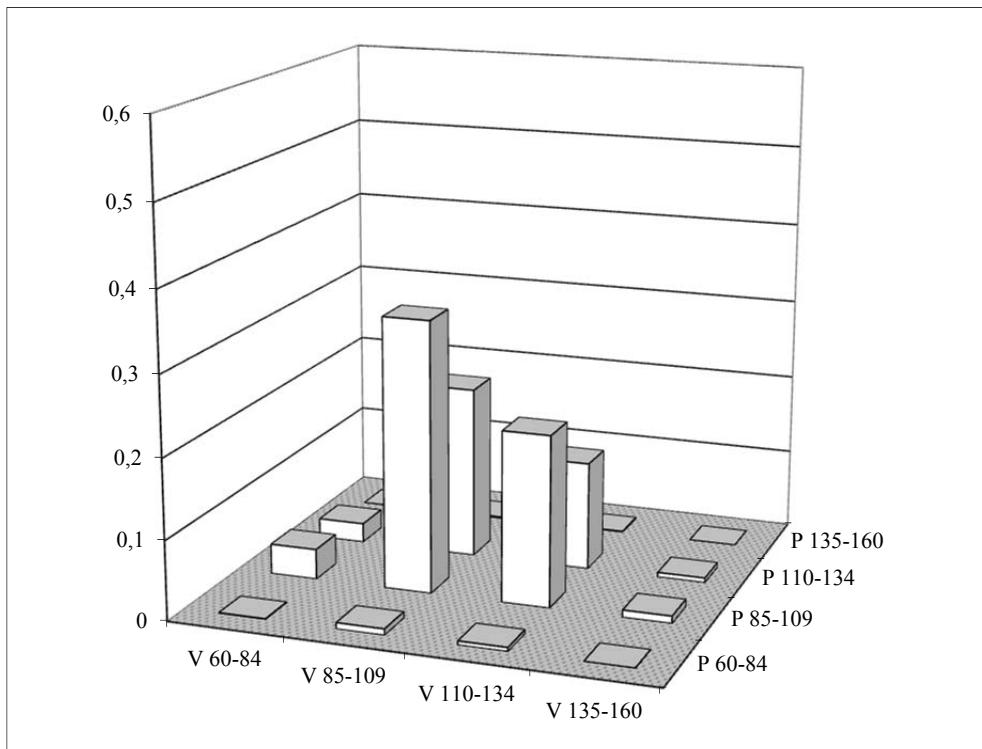


Рис. 3.26. Распределение вероятностей пребывания в группах состояний двухфакторной модели: 7 лет (экстраполированные значения).

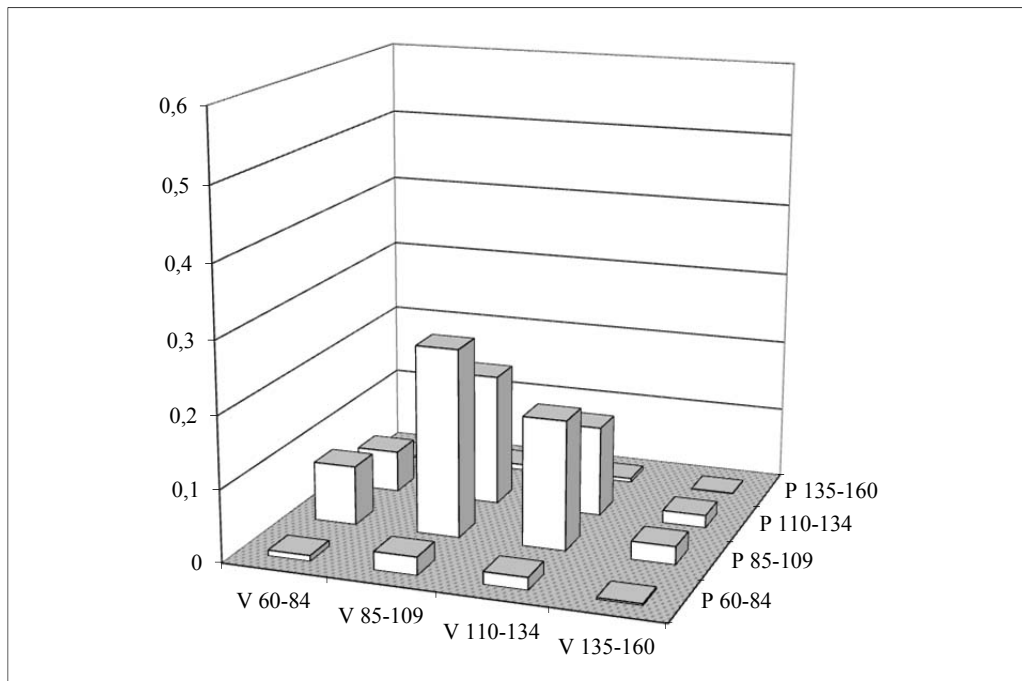


Рис. 3.27. Распределение вероятностей пребывания в группах состояний двухфакторной модели: 13 лет.

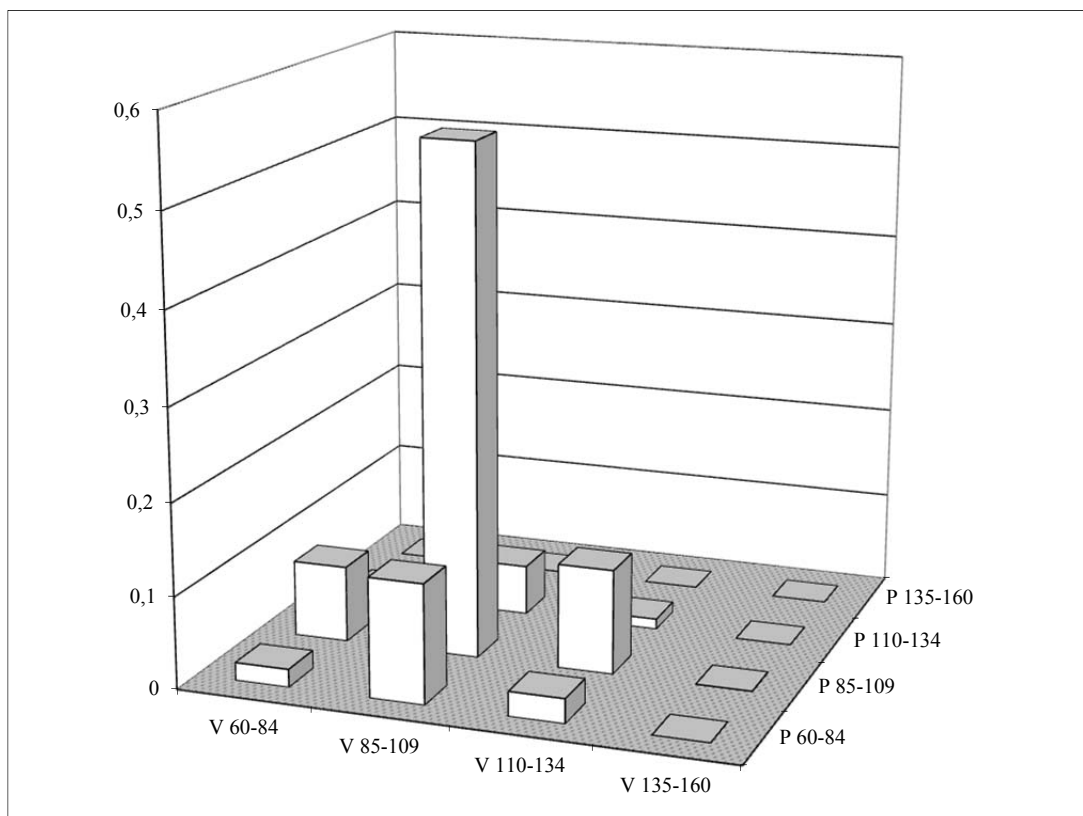


Рис. 3.28. Распределение вероятностей пребывания в группах состояний двухфакторной модели: 16 лет.

3.6.3. Обсуждение результатов

Возрастной интервал от 13 до 16 лет для российских школьников, в основном, соответствует так называемому *переходному возрасту*. Учитывая это, анализ соотношений между интенсивностями переходов, представленных на рис. 3.22-3.23, позволяет сделать следующие качественные выводы³⁷, касающиеся *общих закономерностей изменения показателей интеллекта в указанный период*:

- 1) эффекты воздействий систематических факторов на показатели вербального и невербального интеллектов в детском переходном возрасте, по сравнению с предшествующим периодом развития, значительно возрастают;
- 2) в возрасте, предшествующем переходному, эффекты систематических воздействий, направленные как в сторону уменьшения, так и в сторону увеличения показателей интеллекта, не обнаруживают значимой зависимости от уровня умственного развития и примерно одинаковы;
- 3) чем выше интеллект ребенка в переходном возрасте, тем сильнее систематические факторы способствуют его уменьшению, и,

³⁷ Следует подчеркнуть, что все выводы, приведенные в данном разделе, распространяются только на детей из русскоязычных семей среднего класса, проживающих в московском регионе. Это обусловлено составом исследованной выборки.

наоборот, чем ниже интеллект, тем сильнее указанные факторы способствуют его увеличению;

- 4) для детей, имеющих очень высокий коэффициент умственного развития (135-160), эффекты систематических воздействий, направленные в переходном возрасте в сторону уменьшения показателей интеллекта, очень значительны и фактически подавляют аналогичные воздействия, направленные в сторону повышения интеллекта;
- 5) для детей, имеющих очень низкий коэффициент умственного развития (60-85), эффекты систематических воздействий, направленные в переходный период в сторону увеличения показателей интеллекта, существенно превышают аналогичные воздействия, направленные в сторону понижения интеллекта.

Как указано в предыдущем разделе, между вербальным и невербальным интеллектом и в 13, и в 16 лет существует значимая корреляционная связь, причем соответствующие коэффициенты корреляции примерно равны. Анализ представленных на рис. 3.26-3.28 диаграмм, отражающих эволюцию вероятностей пребывания в состояниях двухфакторной модели, позволяет сделать более конкретные качественные выводы, касающиеся взаимных связей вербального и невербального интеллектов в переходном возрасте и до него, а именно:

- 1) до начала переходного возраста вербальный и невербальный интеллект развиваются под воздействием систематических факторов примерно одинаково³⁸;
- 2) в младшем и среднем школьном возрасте существует слабая тенденция к уменьшению показателей вербального и невербального интеллектов, *более выраженная для вербального интеллекта*; у незначительного числа школьников, при этом, тем не менее, вербальный интеллект возрастает³⁹;
- 3) в переходном возрасте тенденция к ослаблению обоих типов интеллекта резко усиливается:
 - более чем в 4 раза уменьшается число школьников, одновременно имеющих умеренно высокие⁴⁰ показатели вербального и невербального интеллектов;

³⁸ Действительно, диаграммы в 7 и 13 лет примерно симметричны: большим, чем среднее, значениям одного показателя, как правило, соответствуют большие, чем среднее, значения другого, и наоборот; число детей, имеющих более развитый, чем средний, вербальный интеллект и менее развитый, чем средний, невербальный интеллект, примерно равно числу детей с обратным соотношением указанных показателей.

³⁹ Как показывают диаграммы для 7 и 13 лет, число школьников как с очень слабым, так и очень сильным вербальным интеллектом возрастает в 2-3 раза за счет уменьшения школьников с близкими к среднему значениями данного показателя. Для невербального интеллекта этот эффект имеет место, но гораздо слабее выражен.

⁴⁰ 110-134 единиц.

- за счет чего, в основном, происходит примерно двукратное увеличение числа школьников, одновременно имеющих умеренно низкие⁴¹ показатели указанных типов интеллекта;
 - число школьников, имеющих очень высокие⁴² показатели по хотя бы одному из рассматриваемых типов интеллекта, падает практически до нуля;
- 4) указанная выше тенденция *более выражена для невербального интеллекта*: число школьников с очень низким значением этого показателя⁴³ в переходном возрасте увеличивается примерно в два раза; вербальный интеллект при этом демонстрирует относительно *большую устойчивость к ослаблению*.
- 5) наиболее устойчивой к ухудшению интеллектуальных показателей оказывается пропорция школьников с умеренно высокими показателями вербального интеллекта и умеренно низкими показателями невербального интеллекта (так называемые «*говоруны*»): их число по прошествии переходного возраста уменьшается всего на 17%. По-видимому, это во многом обусловлено переходом в эту категорию школьников с умеренно высокими показателями по обоим типам интеллекта⁴⁴.

Выявленные закономерности подтверждают распространенное мнение о том, что обучение по стандартным российским школьным программам не только не способствует развитию одаренных детей, но и значимо ухудшает их интеллектуальные показатели в переходном возрасте. Примерно те же тенденции наблюдаются и для «слабых» детей, хотя они и не так явно выражены. Одним из очевидных способов преодоления рассмотренных негативных тенденций, по-видимому, могло бы стать дифференцированное обучение одаренных и «слабых» детей по разным программам.

3.7. ПРИМЕР 3. ПРИМЕНЕНИЕ СЛОЖНЫХ МАРКОВСКИХ МОДЕЛЕЙ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ТЕХНИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ

3.7.1. Техническая задача

Высокие уровни динамических нагрузок в акустическом диапазоне частот являются одной из основных причин усталостного разрушения авиационных конструкций. Эта проблема впервые привлекла внимание специалистов в середине 50-х годов, что было связано с массовым появлением усталостных повреждений, обусловленных повышением уровня

⁴¹ 85-109 единиц.

⁴² 135-160 единиц.

⁴³ 60-84 единицы.

⁴⁴ За счет большей устойчивости к ослаблению вербального интеллекта.

акустических нагрузок при переходе от поршневых к турбореактивным и турбовинтовым двигателям. Сейчас, благодаря проведенным исследованиям и накопленной информации, разрушения, как правило, удается обнаружить еще до того, как произойдет значимое снижение прочности летательного аппарата. Однако динамические нагрузки приводят к нарушению местной прочности, трещинам в панелях и частичному разрушению силового набора, что снижает ресурс самолета, приводит к дополнительным трудозатратам на ремонт авиационной техники, а, в отдельных случаях, может создавать предпосылки к летному происшествию. При этом приходится проводить длительные ремонтно-восстановительные работы и повышать требования к текущим осмотрам. Время, затрачиваемое на ремонт конструкций, вышедших из строя вследствие усталостных повреждений, на некоторых типах зарубежных самолетов составляло в среднем 10 человеко-часов на 1 час полета. В последнее время интерес к акустическим вибрациям вновь повысился в связи с разработкой новых поколений сверхзвуковых пассажирских и боевых самолетов, а также гиперзвуковых летательных аппаратов.

Наибольшее влияние акустические нагрузки оказывают на тонкостенные элементы конструкции летательного аппарата. Основными источниками этих нагрузок на поверхности летательного аппарата являются пульсации давления в турбулентном пограничном слое, шум струй двигателей, шум винтов и пульсации давления при бафтинге. Наиболее критичными к разрушению часто оказываются также каналы воздухозаборников. Динамическое нагружение конструкций воздухозаборников высокочастотными пульсациями давления при нестационарном обтекании возникает при срыве потока на больших углах атаки и полетах при больших числах Маха, вследствие образования скачков уплотнения, на форсажных режимах работы двигателя, а также при помпаже. Источником возникновения пульсаций давления является свободная мелкомасштабная и крупномасштабная турбулентность. Нагрузки носят случайный характер, их уровни в разных точках поверхности летательного аппарата могут составлять от 145 до 170 дБ, при широком частотном диапазоне (до 5000 Гц). Следует отметить и такие опасные последствия воздействия акустических нагрузок на авиационные конструкции, как разрушения топливных баков с последующими утечками топлива и разгерметизацию отсеков (салонов).

Прогнозирование процесса накопления усталостных повреждений, обусловленных акустическими нагрузками, является одной из важных задач, возникающих на этапе проектирования, а также при эксплуатации летательных аппаратов. Ее решение позволяет устанавливать обоснованный регламент плановых осмотров и ремонтных работ, проводить выбор оптимальных модификаций конструкций и снижать объем дорогостоящих измерений в процессе разработки и испытаний новой техники.

Сложности воспроизведения акустических вибраций в условиях эксперимента побуждают применять методы математического моделирования. Они, как правило, позволяют получать достаточно полную информацию об объекте, однако требуют обоснования корректности своего применения. В связи с этим эффективен подход, при котором ограниченные экспериментальные данные используются для настройки параметров модели, с последующим исследованием степени согласованности прогноза и наблюдений.

Усталостные повреждения авиационных конструкций связаны с поведением материалов на молекулярном и атомном уровне. На исследования в этой области были потрачены большие усилия [1, 2], однако значимое продвижение достигнуто лишь для сравнительно простых конструкций при тщательно контролируемых лабораторных условиях. Ряд специалистов пришел к выводу, что «в настоящее время поведение конструкционных материалов в лабораторных (не говоря уже об эксплуатационных) условиях изучено не настолько хорошо, чтобы основывать модели кумулятивных повреждений на фундаментальных физических законах. Учитывая масштабы уже предпринятых усилий и полученные при этом результаты, следует оценить как маловероятное достижение существенного прогресса в этом направлении в обозримом будущем» [1]. Таким образом, актуально создание *феноменологических моделей*, которые опираются на понимание особенностей исследуемого явления на макроскопическом уровне и основаны на общих, добытых из опыта закономерностях и гипотезах.

Феноменологические модели по логике своего построения могут быть разделены на детерминированные и вероятностные. Детерминированные модели нашли широкое применение при расчете ресурса авиационных конструкций. Качество феноменологических моделей удобно характеризовать отношением среднего времени жизни конструкции к соответствующему среднеквадратическому отклонению. Если это отношение велико и допустимые вероятностными распределениями вариации параметров модели незначительно меняют усредненный прогноз, то приемлемы детерминированные модели. При малом значении указанного отношения более уместны вероятностные модели.

Как правило, использование детерминированных моделей даже в тщательно контролируемых лабораторных экспериментах приводит к малым значениям отношения среднего времени жизни к соответствующему среднеквадратическому отклонению (менее 1,5) [1]. В условиях реальной эксплуатации авиационных конструкций, когда параметры нагружения и среды часто и неконтролируемо изменяются, это отношение значительно уменьшается. Отклонения от среднего срока службы могут быть настолько велики, что ими нельзя пренебрегать без серьезных последствий.

Сам вид детерминированных феноменологических моделей, используемых для оценки ресурса, предполагает большой разброс в

динамике развития и, соответственно, большие ошибки в прогнозировании усталостного разрушения. Поэтому для описания процессов усталостного разрушения более подходят вероятностные феноменологические модели, способные описывать большие отклонения от усредненного варианта поведения. Их целесообразно применять при наличии статистических данных, полученных в результате испытаний конструкции, из опыта эксплуатации и других источников. В наиболее удачных вариантах этих моделей вероятности повреждений прогнозируются с использованием сетей, поведение которых описывается марковскими процессами с дискретными состояниями и непрерывным временем.

В этом разделе представлены обучаемые многофакторные сети Маркова, позволяющие прогнозировать динамику изменения вероятностей появления повреждений в сложных конструкциях [8, 12].

3.7.2. Применяемые многофакторные сети Маркова

Для того, чтобы модель адекватно представляла исследуемые характеристики сложных систем, удобно использовать двух- и многофакторные сети Маркова. Типовая структура двухфакторной сети показана на рис. 3.29. Данная модель учитывает два определяемых исследователем фактора различной природы, значимых для исследуемой характеристики. Каждый фактор соответствует одному из двух ортогональных направлений на плоскости: вертикальному или горизонтальному. Каждая строка (столбец) состояний сети соответствует определенному уровню значений фактора. Переходы между состояниями возможны только вдоль указанных ортогональных направлений, а именно: интенсивности λ_{ij} соответствуют правым горизонтальным переходам, интенсивности μ_{ij} - левым, интенсивности θ_{ij} соответствуют вертикальным переходам вниз, а интенсивности η_{ij} - вертикальным переходам вверх. В общем случае, эти интенсивности переходов являются функциями их позиции в диаграмме:

$$\lambda_{ij}=\lambda(i,j), \mu_{ij}=\mu(i,j), \theta_{ij}=\theta(i,j), \eta_{ij}=\eta(i,j).$$

Эти функции обеспечивают представление моделью тонких особенностей поведения исследуемых систем (см. примеры в разделах 3.7.2.1-2).

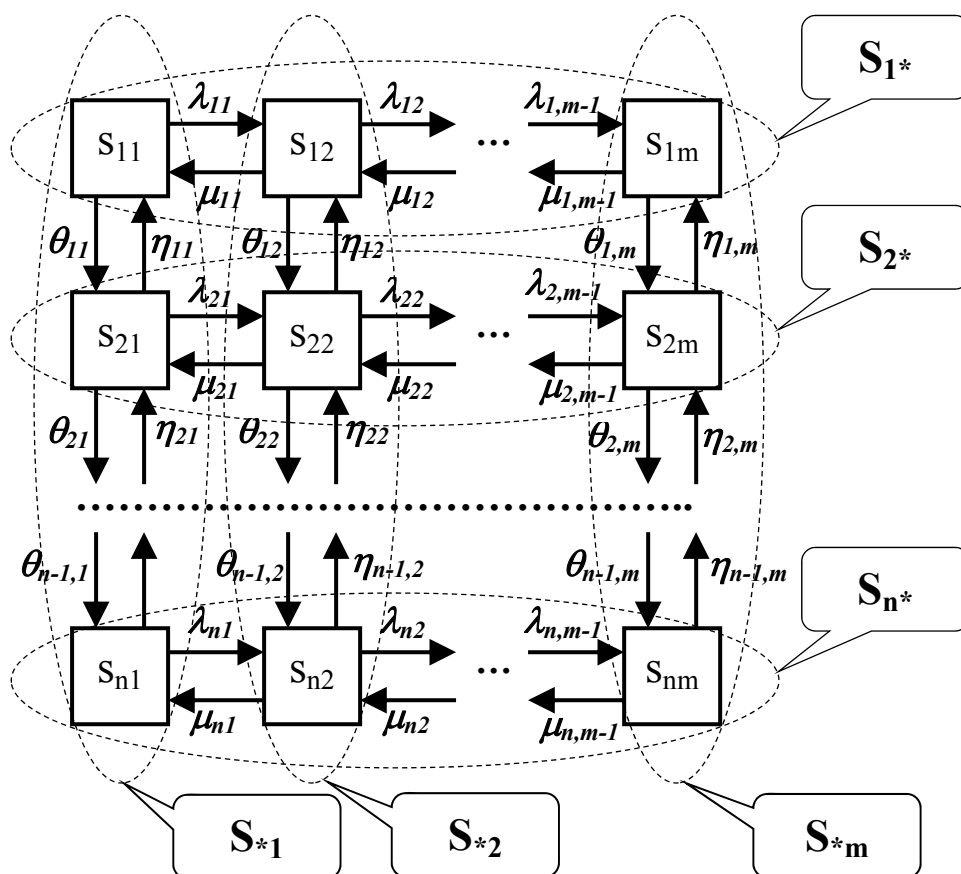


Рис. 3.29. Структура двухфакторной сети Маркова.

В практически важных случаях идентификация свободных параметров двух- и многофакторных моделей является сложной вычислительной задачей. Однако метод декомпозиции, представленный в разделе 3.3, позволяет упростить эту работу. Рассмотрим его на примере наших моделей.

Строки и столбцы состояний исходной сети могут быть объединены в «сгруппированные» состояния, а именно: нахождение в состоянии S_{i^*} ($i=1,2,\dots,n$) равносильно нахождению в одном из состояний $s_{i1}, s_{i2}, \dots, s_{im}$, а нахождение в состоянии S_{j^*} ($j=1,2,\dots,m$) равносильно нахождению в одном из состояний $s_{1j}, s_{2j}, \dots, s_{nj}$. Согласно теоремам о суммах пуассоновских потоков событий, переходы между сгруппированными состояниями также удовлетворяют свойствам пуассоновских потоков событий, а их интенсивности являются суммами аналогичных характеристик в соответствующих направлениях:

$$A_i = \sum_{k=1}^m \lambda_{ki}, \quad M_i = \sum_{k=1}^m \mu_{ki}, \quad \Theta_i = \sum_{k=1}^m \theta_{ik}, \quad H_i = \sum_{k=1}^m \eta_{ik}.$$

Таким образом, исследование исходной двухфакторной системы сводится к анализу двух производных однофакторных систем (рис. 3.30-31), которые могут быть идентифицированы, как показано в разделах 1.2.3 и 3.3. Полагая, что вероятности пребывания в вертикально и горизонтально расположенных группах состояний независимы, вероятность p_{ij} нахождения в состоянии s_{ij} может быть вычислена при возврате к исходной системе как

произведение вероятностей P_i и P_j пребывания в «сгруппированных» состояниях S_{i*} и S_{*j} , соответственно⁴⁵.

В практических приложениях, представленная выше общая модель может быть упрощена и конкретизирована. Очевидно, что двухфакторные сети Маркова и приемы работы с ними могут быть легко обобщены на случай трёх- и многофакторных структур.

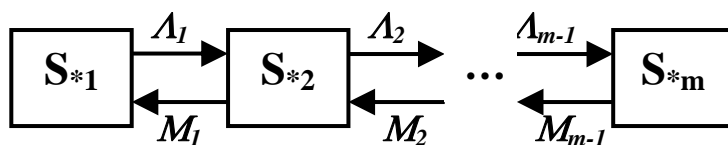


Рис. 3.30. Производная однофакторная система (результат группировки столбцов состояний).

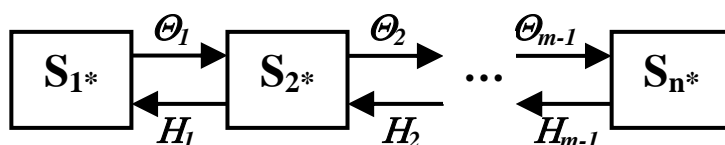


Рис. 3.31. Производная однофакторная система (результат группировки строк состояний).

3.7.2.1. Пример 1. Разрушение металлической панели с подкрепляющими элементами

Как показано в разделе 1.5, однофакторные сети Маркова, представляющие процессы «гибели и размножения», оказались приемлемыми для прогнозирования усталостных разрушений авиационных панелей, находящихся под воздействием акустической нагрузки. Однако согласование между прогнозом и наблюдением может быть улучшено, если учесть ускорение разрушения обшивки конструкции (см. рис. 3.32), обусловленное последовательным выходом из строя подкрепляющих элементов (см. рис. 3.33), посредством комбинации однофакторных моделей. Соответствующая двухфакторная модель представляет панель с $n-1$ подкрепляющими элементами и m процентными уровнями наработки обшивки на отказ (рис. 3.34). Состояние S_{ij} ($j=1, \dots, m-1$) соответствует нахождению на j -м дискретном уровне наработки на отказ с $i-1$ вышедшими из строя подкрепляющими элементами. Состояние S_{im} соответствует выходу панели из строя при наличии $i-1$ разрушенного подкрепляющего элемента. Параметр λ_i – интенсивность переходов, представляющая частоту переходов с i -го дискретного уровня наработки на отказ. Параметр θ_i определяет частоту появления i -го разрушенного подкрепляющего элемента. Эти параметры могут быть заданы следующим образом:

⁴⁵ Как указано в разделе 3.3, сделанное предположение приводит к усреднению интенсивностей переходов вдоль заданных направлений в каждой из групп состояний и является приемлемым, если постановка задачи не предполагает определённых зависимостей между свободными параметрами.

$$\lambda_{i+1}=(1+\alpha)\lambda_i, i=1, \dots, n-1;$$

$$\theta_{i,j}=\theta_{i-1,j}i/(i-1), i=2, \dots, n-1; j=1, \dots, m-1;$$

$$\theta_{i,j+1}=(1+\beta)\theta_{ij}, i=1, \dots, n-1; j=1, \dots, m-2.$$

Таким образом, рассматриваемая модель имеет только четыре идентифицируемых параметра: $\alpha \geq 0$, $\beta \geq 0$, λ_1 , θ_{11} . При данном подходе модель представляет не только динамику наработки на отказ, как однофакторная модель, но и учитывает ускорение выработки ресурса, обусловленное выходом из строя подкрепляющих элементов.

В первом приближении указанные выше соотношения представляют, соответственно, следующие факты:

- чем больше число вышедших из строя подкрепляющих элементов, тем быстрее обшивка вырабатывает свой ресурс;
- чем больше подкрепляющих элементов вышло из строя, тем больше темп разрушения оставшихся (темп разрушения подкрепляющих элементов полагается пропорциональным числу элементов, вышедших из строя);
- чем больше степень выработки ресурса конструкции, тем быстрее идет разрушение подкрепляющих элементов.



Рис. 3.32. Усталостное разрушение обшивки.

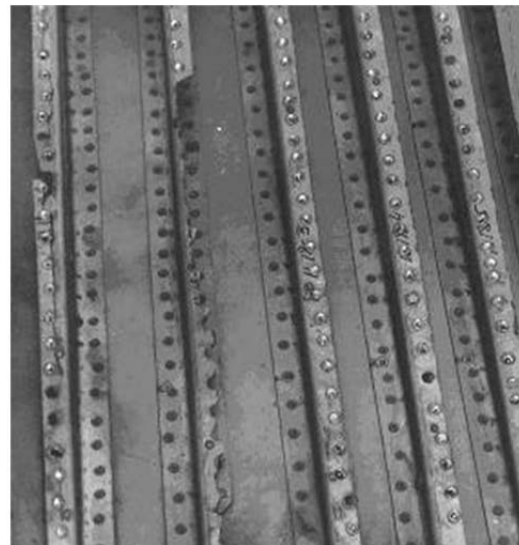


Рис. 3.33. Разрушение подкрепляющих элементов.

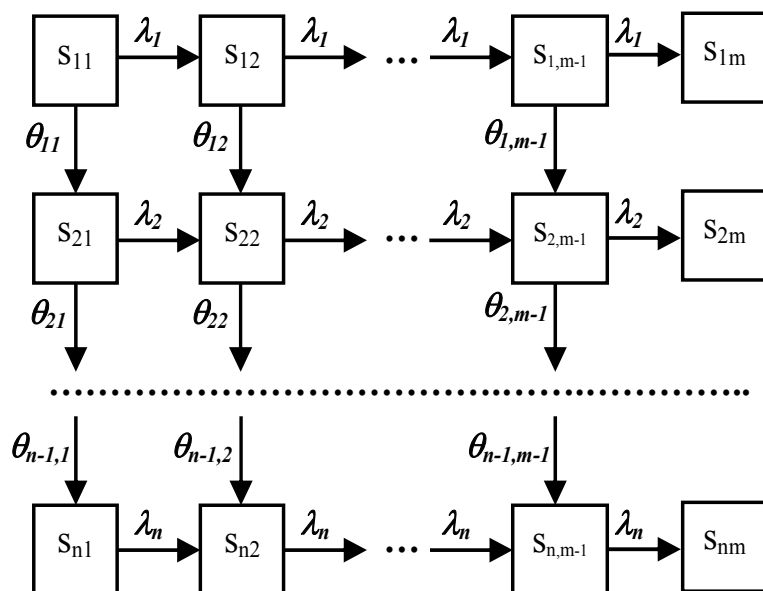


Рис. 3.34. Двухфакторная сеть Маркова, представляющая развитие усталостного разрушения подкрепленных панелей.

Поведение исследуемых систем описывается динамикой диаграмм вероятностей пребывания в состояниях системы (рис. 3.35) и идентифицированными интенсивностями переходов между состояниями.

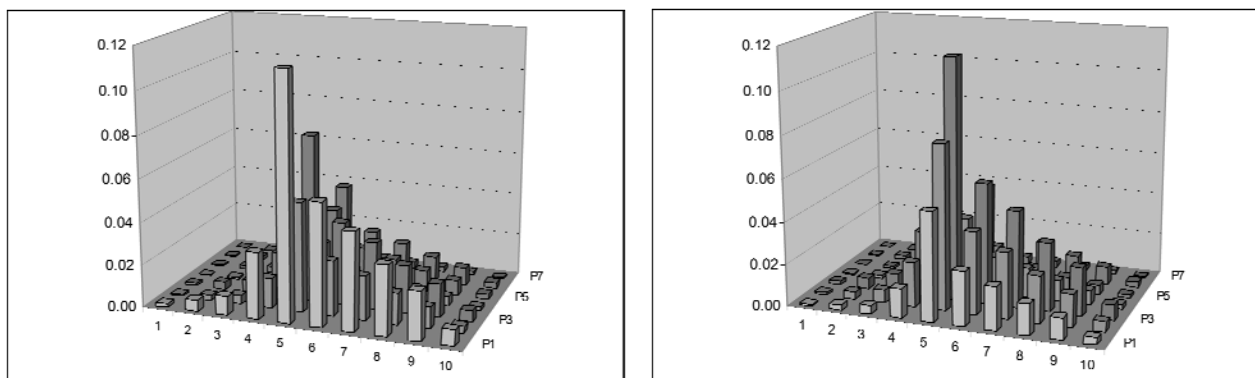


Рис. 3.35. Усталостное разрушение подкреплённых панелей: диаграммы вероятностей пребывания в состояниях двухфакторной сети в различные моменты времени.

3.7.2.2. Пример 2. Разрушение металлических панелей с подкрепляющими элементами и динамическими гасителями колебаний

Применение простых и надежных динамических гасителей колебаний имеет большие преимущества, когда механические конструкции находятся под воздействием значительных по величине внешних нагрузок и другие технические решения, способствующие уменьшению уровня вибраций, неприемлемы из-за наличия агрессивной среды (эта ситуация, в частности, характерна для панелей воздухозаборников летательных аппаратов). Чтобы отразить особенности развития усталостного разрушения в этом случае, рассмотренная выше двухфакторная сеть может быть преобразована в

трёхфакторную, учитывающую ускорение разрушения, обусловленное уменьшением числа работоспособных гасителей. Соответствующая модель для панели с двумя гасителями и ее производные двухфакторные подсистемы показаны на рис. 3.36-37. Постоянная интенсивность переходов ϕ (новый свободный параметр) описывает переходы в третьем направлении. Чтобы представить ускорение разрушения, связанное с поломками динамических гасителей, в соответствующие выражения для интенсивностей переходов включается дополнительный свободный параметр γ :

$$\lambda_{i,k+l}=(1+\gamma)\lambda_{i,k}; \theta_{ij,k+l}=(1+\gamma)\theta_{ij,k}, k=1,2,$$

где третий индекс показывает число вышедших из строя гасителей ($0, 1$ или 2).

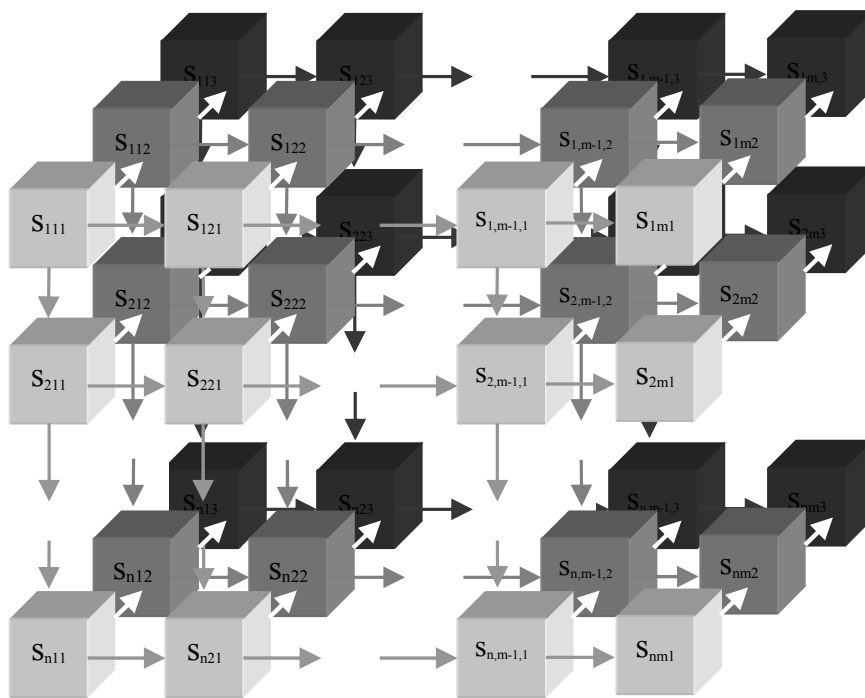


Рис. 3.36. Трёхфакторная сеть, представляющая развитие усталостного разрушения в подкрепленных панелях с динамическими гасителями.

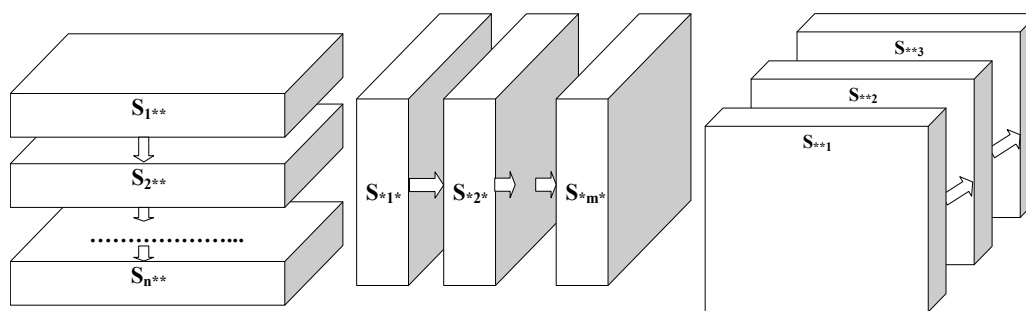


Рис. 3.37. Производные двухфакторные прогнозирующие системы (результат группировки слоёв состояний).

3.8. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

1. Перспективы разработки современных технологий тестирования связаны с включением в измерительный процесс методов современной экспериментальной психологии и, в частности, средств анализа глазодвигательной активности.
2. Развитие и распространение имеющихся достижений в этой области сдерживается рядом ограничений, наиболее существенными из которых являются слабые возможности для исследования временной динамики движения глаз и неразвитый математический аппарат.
3. Представлен новый подход к построению интеллектуальных и компетентностных тестов, основанный на аппроксимации распределения вероятностей пребывания взора в различных зонах визуального стимула с помощью марковского случайного процесса, заданного уравнением Фоккера-Планка-Колмогорова, и соответствующих этой формализации технологиях диагностики. Наиболее вероятные диагнозы определяются путём оценки степени соответствия траектории взора эталонным вероятностным распределениям, идентифицированным по результатам наблюдений для каждой из диагностируемых групп испытуемых.
4. В рамках рассмотренного подхода применяется метод приближённого решения уравнения Фоккера-Планка-Колмогорова, сводящий исходную задачу к решению задачи Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений Колмогорова относительно плотностей вероятности пребывания взора по поверхности стимула, усреднённых по площади ячеек его дискретизованной области, а также используется статистический критерий для оценки степени соответствия наблюдаемых и прогнозируемых частот пребывания в ячейках дискретизованной области стимула в контрольные моменты времени, построенный на основе анализа регрессионной зависимости этих частот.
5. Представленные примеры практического применения свидетельствуют об эффективности рассмотренного подхода к построению процедур тестирования.

6. Представлена концепция обучаемых многофакторных сетей Маркова, позволяющих исследовать эффекты воздействия двух и более факторов различной природы, гибко учитывая особенности поведения наблюдаемых систем и улучшая качество прогнозирования.
7. Предложенная техника декомпозиции многофакторных сетей существенно упрощает идентификацию их параметров и вычисление вероятностных функций, представляющих динамику пребывания в сетевых состояниях. При этом исходная сеть разбивается на определенное число производных подсетей меньшей размерности, состояния которых представляют множества состояний первоначальной сети. Каждая подсеть идентифицируется отдельно. Полученные в результате идентификации вероятностные функции пребывания в состояниях производных сетей пересчитываются в аналогичные характеристики исходной сети.
8. Рассмотрены многофакторные сети Маркова, применяемые для исследования эволюции и взаимодействия психологических характеристик и обученные, используя наблюдаемые распределения индивидуальных характеристик испытуемых в контрольные моменты времени.
9. Рассмотрены обучаемые многофакторные сети Маркова, позволяющие прогнозировать поведение сложных технических систем. Возможности представленного подхода продемонстрированы на примерах моделей усталостного разрушения металлических конструкций.

ЛИТЕРАТУРА К РАЗДЕЛАМ 3.1-3.6

1. Барабанщиков В.А. Восприятие выражений лица. - М.: ИП РАН, 2009. - 448 с.
2. Барабанщиков В.А. Восприятие индивидуально-психологических особенностей человека по изображению целого и частично открытого лица. - Экспериментальная психология, 2008, №1, с. 62-83.
3. Барабанщиков В.А. Окуломоторные структуры восприятия. - М.: ИП РАН, 1997. - 384 с.
4. Барабанщиков В.А. Экспрессии лица и их восприятие. - М.: ИП РАН, 2012.
5. Барабанщиков В.А., Ананьева К.И., Харитонов В.Н. Организация движений глаз при восприятии изображений лица. - Экспериментальная психология, 2009, №2, с. 31-60.
6. Барабанщиков В.А., Демидов А.А. Экспериментальная психология в России: современное состояние и перспективы развития. - Экспериментальная психология, 2011, №1, с. 134-140.

7. Барабанщиков В.А., Майнина И. Н. Оценка «глубинных» индивидуально-психологических особенностей человека по фотоизображению его лица. - Экспериментальная психология, 2010, №4, с. 50-71.
8. Безруких М. М., Демидов А. А., Иванов В. В. Возрастные особенности окулomotorной активности детей в процессе чтения. //Психология человека в современном мире. Т. 2: Всеросс. юбил. науч. конф., посв. 120-летию со дня рождения С.Л. Рубинштейна, 2009, с. 151-155.
9. Демидов А.А., Жегалло А.В. Оборудование SMI для регистрации движений глаз: тест-драйв. - Экспериментальная психология, 2008, №1, с. 149–159.
10. Жегалло А.В. Система регистрации движений глаз SMI High Speed: особенности использования. - Экспериментальная психология, 2009, №4, с. 111–117.
11. Крамер Г. Математические методы статистики. – М.: Мир, 1976. – 648 с.
12. Куравский Л.С., Баранов С.Н. Применение нейронных сетей для диагностики и прогнозирования усталостного разрушения тонкостенных конструкций. – Нейрокомпьютеры: разработка и применение, 2001, №12, с. 47-63.
13. Куравский Л.С., Баранов С.Н. Синтез сетей Маркова для прогнозирования усталостного разрушения. – Нейрокомпьютеры: разработка и применение, 2002, №11, с. 29-40.
14. Куравский Л.С., Баранов С.Н., Корниенко П.А. Обучаемые многофакторные сети Маркова и их применение для исследования психологических характеристик. – Нейрокомпьютеры: разработка и применение, 2005, №12, с. 65-76.
15. Куравский Л.С., Баранов С.Н., Малых С.Б. Нейронные сети в задачах прогнозирования, диагностики и анализа данных: Учеб. пособие. - М.: РУСАВИА, 2003. - 100 с.
16. Куравский Л.С., Баранов С.Н., Юрьев Г.А. Синтез и идентификация скрытых марковских моделей для диагностики усталостного разрушения. - Нейрокомпьютеры: разработка и применение, 2010, №12, с. 20-36.
17. Куравский Л.С., Марголис А.А., Мармалюк П.А., Панфилова А.С., Юрьев Г.А. Математические аспекты концепции адаптивного тренажёра. - Психологическая наука и образование, 2016, т. 21, № 2, с. 84–95, doi: 10.17759/pse.2016210210.
18. Куравский Л.С., Марголис А.А., Юрьев Г.А., Мармалюк П.А. Концепция системы поддержки принятия решений для психологического тестирования. - Психологическая наука и образование, 2012, №1, с. 56-65.
19. Куравский Л.С., Мармалюк П.А., Алхимов В.И., Юрьев Г.А. Математические основы нового подхода к построению процедур тестирования. - Экспериментальная психология, 2012, №4, с. 75-98.

20. Куравский Л.С., Мармалюк П.А., Барабанщиков В.А., Безруких М.М., Демидов А.А., Иванов В.В., Юрьев Г.А. Обучаемые структуры как основа программного обеспечения для диагностики навыков и компетенций. - *Нейрокомпьютеры: разработка и применение*, №5, 2013, с. 46-60.
21. Куравский Л.С., Мармалюк П.А., Барабанщиков В.А., Безруких М.М., Демидов А.А., Иванов В.В., Юрьев Г.А. Оценка степени сформированности навыков и компетенций на основе вероятностных распределений глазодвигательной активности. - *Вопросы психологии*, №5, 2013, с. 64-80.
22. Куравский Л.С., Мармалюк П.А., Баранов С.Н., Алхимов В.И., Юрьев Г.А., Артюхина С.В. Марковские модели глазодвигательной активности и их применение для тестирования профессиональных навыков. – *Информационные технологии*, №8 (216), 2014, с. 34-43 .
23. Куравский Л.С., Мармалюк П.А., Юрьев Г.А. Диагностика профессиональных навыков на основе вероятностных распределений глазодвигательной активности. – *Вестник РФФИ*, 2016, №3(91), с. 72–82.
24. Куравский Л.С., Мармалюк П.А., Юрьев Г.А., Баранов С.Н., Полещук Г.Н., Смирнов А.А., Шишов А.Н. Диагностика лётного состава по результатам работы на авиационных тренажёрах. - *Нейрокомпьютеры: разработка, применение*, № 10, с. 14-23.
25. Куравский Л.С., Мармалюк П.А., Юрьев Г.А., Беляева О.Б., Прокопьева О.Ю. Диагностика лётного состава по результатам работы на авиационных тренажёрах. – *Экспериментальная психология*, 2016, т. 9, № 3, с. 118–137, doi:10.17759/exppsy.2016090310.
26. Куравский Л.С., Ушаков Д.В., Мармалюк П.А., Панфилова А.С. Исследование факторных влияний на развитие психологических характеристик с применением нового подхода к оценке адекватности моделей наблюдениям. - *Информационные технологии*, №11, 2011, с. 67-77.
27. Куравский Л.С., Юрьев Г.А. Адаптивное тестирование как марковский процесс: модели и их идентификация. - *Нейрокомпьютеры: разработка и применение*, 2011, №2, с. 21-29.
28. Куравский Л.С., Юрьев Г.А. Вероятностный метод фильтрации артефактов при адаптивном тестировании. - *Экспериментальная психология*, 2012, №.1, с. 119-131.
29. Куравский Л.С., Юрьев Г.А. Использование марковских моделей при обработке результатов тестирования. - *Вопросы психологии*, 2011, №2, с. 98-107.
30. Куравский Л.С., Юрьев Г.А. Об одном подходе к адаптивному тестированию и устранению его артефактов. - *Нейрокомпьютеры: разработка и применение*, №1, 2012, с. 54-66.

31. Мармалюк П.А., Звонкина О.М. Опорные показатели глазодвигательной активности при прохождении теста Равена и автоматизация их расчёта. - //Молодые ученые - нашей новой школе. Матер. XI Межвуз. науч.-практ. конф. с межд. участием - М.: МГППУ, 2012, с. 350-352.
32. Обознов А.А. Психическая регуляция операторской деятельности (в особых условиях рабочей среды). – М.: ИП РАН, 2003. – 184 с.
33. Панфилова А.С. Система тестирования интеллекта на базе факторных моделей и самоорганизующихся карт Кохонена. - Нейрокомпьютеры: разработка и применение, 2012, №9, с. 6-12.
34. Руководство по лётной эксплуатации вертолёта Ми-8МТВ. – Министерство транспорта РФ. – М.: 1994.
35. Тихонов В.И., Шахтарин Б.И., Сизых В.В. Случайные процессы. Примеры и задачи. /Т.5. Оценка сигналов, их параметров и спектров. Основы теории информации. - М.: Горячая линия-Телеком, 2009. - 400 с.
36. Тюменева Ю.А. Психологическое измерение. - М.: Аспект-Пресс, 2007.
37. Хохлова А. А. Исследование глазодвигательной активности при прохождении матричного теста интеллекта Равена //Молодые ученые - нашей новой школе. Матер. X науч.-практ. межвуз. конф. - М.: МГППУ, 2011, с. 343-345.
38. Шахтарин Б.И. Случайные процессы в радиотехнике. /Т.1. Линейные преобразования. - М.: Горячая линия-Телеком, 2010. - 520 с.
39. Baker F.B. The Basics of Item Response Theory. ERIC Clearinghouse on Assessment and Evaluation, University of Maryland, College Park, MD, 2001.
40. Brandt S.A., Stark L.W. (1997). Spontaneous eye movements during visual imagery reflect the content of the visual scene. *Journal of Cognitive Neuroscience*, 9, 27–38.
41. Cagli R.C., Coraggio P., Napoletano P., Boccignone G. (2008). What the draughtsman's hand tells the draughtsman's eye: A sensorimotor account of drawing. *International Journal of Pattern Recognition and Artificial Intelligence*, 22, 1015–1029.
42. Dayan, P. (1993). Improving generalization for temporal difference learning: The successor representation. *Neural Computation*, 5, 613–624.
43. Ellis S.R., Stark L. (1986). Statistical dependency in visual scanning. *Human Factors*, 28, 421–438.
44. Gregory R.J. Psychological testing: History, principles, and applications (5th edition). - New York: Pearson, 2007.
45. Gulliksen H. Theory of Mental Tests. - John Wiley & Sons Inc, 1950.
46. Hayes T.R., Petrov A.A., Sederberg P.B. A novel method for analyzing sequential eye movements reveals strategic influence on Raven's Advanced Progressive Matrices. *Journal of Vision*, 2011, 10, 1-11.

47. Jansen A.R., Marriott K., Yelland G.W. (2007). Parsing of algebraic expressions by experienced users of mathematics. *European Journal of Cognitive Psychology*, 19, 286–320.
48. Kuravsky L. S., Baranov S. N. Condition monitoring of the structures suffered acoustic fatigue failure and forecasting their service life. – In: *Proc. Condition Monitoring 2003*, Oxford, United Kingdom, July 2003, pp. 256-279.
49. Kuravsky L. S., Malykh S. B. On the application of queuing theory for analysis of twin data. - *Twin Research*, 2000; 3: pp. 92-98.
50. Kuravsky L. S., Marmalyuk P. A., Baranov S. N., Alkhimov V. I., Yuryev G. A. and Artyukhina S. V. A New Technique for Testing Professional Skills and Competencies and Examples of its Practical Applications. - *Applied Mathematical Sciences*, Vol. 9, 2015, no. 21, 1003 – 1026, <http://dx.doi.org/10.12988/ams.2015.411899>.
51. Kuravsky L. S., Marmalyuk P. A., Yuryev G. A. and Dumin P. N. A Numerical Technique for the Identification of Discrete-State Continuous-Time Markov Models. - *Applied Mathematical Sciences*, Vol. 9, 2015, no. 8, 379 – 391, <http://dx.doi.org/10.12988/ams.2015.410882>.
52. Kuravsky L. S., Marmalyuk P. A., Yuryev G. A., Dumin P. N. and Panfilova A. S. Probabilistic Modeling of a Testing Procedure. - *Applied Mathematical Sciences*, Vol. 9, 2015, no. 82, 4053 – 4066, <http://dx.doi.org/10.12988/ams.2015.53234>.
53. Kuravsky L.S. and Baranov S.N. Neural networks in fatigue damage recognition: diagnostics and statistical analysis. – In: *Proc. 11th International Congress on Sound and Vibration*, St.-Petersburg, Russia, July 2004, pp. 2929-2944.
54. Kuravsky L.S. and Baranov S.N. The concept of multifactor Markov networks and its application to forecasting and diagnostics of technical systems. – In: *Proc. Condition Monitoring 2005*, Cambridge, United Kingdom, pp. 111-117, July 2005.
55. Kuravsky L.S., Baranov S.N. and Yuryev G.A. Synthesis and identification of hidden Markov models based on a novel statistical technique in condition monitoring. – In: *Proc. 7th International Conference on Condition Monitoring & Machinery Failure Prevention Technologies*, Stratford-upon-Avon, England, June 2010. – 23 pp.
56. Kuravsky L.S., Marmalyuk P.A., Baranov S.N., Yuryev G.A. Monitoring of flight crew condition using oculomotor activity measurements. // In: *Proc. 12th International Conference on Condition Monitoring & Machinery Failure Prevention Technologies*, Oxford, UK, June 2015. - 8 pp.
57. L. S. Kuravsky, P. A. Marmalyuk, S. N. Baranov, V. I. Alkhimov, G. A. Yuryev and S. V. Artyukhina. A New Technique for Testing Professional Skills and Competencies and Examples of its Practical Applications. - *Applied Mathematical*

- Sciences, Vol. 9, 2015, no. 21, 1003 – 1026, <http://dx.doi.org/10.12988/ams.2015.411899>.
58. L.S. Kuravsky, P.A. Marmalyuk, G.A. Yuryev, O.B. Belyaeva and O.Yu. Prokopieva. Mathematical Foundations of Flight Crew Diagnostics Based on Videoculography Data. - Applied Mathematical Sciences, Vol. 10, 2016, no. 30, 1449–1466, <http://dx.doi.org/10.12988/ams.2016.6122>.
 59. Myers C.W., Schoelles M. J. (2005). ProtoMatch: A tool for analyzing high-density, sequential eye gaze and cursor protocols. Behavior Research Methods, 37, 256–270.
 60. Patalano A. L., Juhasz B. J. and Dicke O. (2010) The Relationship Between Indecisiveness and Eye Movement Patterns in a Decision Making Informational Search Task // Journal of Behavioral Decision Making, 23: 353-368.
 61. Ponsoda V., Scott D., Findlay J.M. (1995). A probability vector and transition matrix analysis of eye movements during visual search. Acta Psychologica, 88, 167–185.
 62. Rabiner L. R. (1989). A tutorial on hidden Markov models and selected applications in speech recognition. Proceedings of the IEEE, 77, 257–286.
 63. Rasch, G. Probabilistic models for some intelligence and attainment tests. // Copenhagen, Danish Institute for Educational Research, expanded edition (1980) with foreword and afterword by B.D. Wright. Chicago: The University of Chicago Press. 1960/1980.
 64. Rayner K. (1998) Eye movements in reading and information processing: 20 years of research // Psychological Bulletin. V. 124, 372-422.
 65. Salvucci D.D., Anderson J.R. (2001). Automated eye-movement protocol analysis. Human-Computer Interaction, 16, 39–86.
 66. Simola J., Salojarvi, Kojo I. (2008). Using hidden Markov model to uncover processing states from eye movements in information search tasks. Cognitive Systems Research, 9, 237–251.
 67. Van der Lans R., Pieters R., Wedel M. (2008). Eyemovement analysis of search effectiveness. Journal of the American Statistical Association, 103, 452–461.
 68. Vigneau F., Caissie A., Bors D. Eye-movement analysis demonstrates strategic influences on intelligence // Intelligence 34, 2006, 261-272.
 69. Wright B.D., Masters G.N. Rating scale analysis. Rasch measurements. - Chicago: MESA Press, 1982.
 70. Wright B.D., Stone M.N. Best Test Design. - Chicago: MESA Press, 1979.

ЛИТЕРАТУРА К РАЗДЕЛУ 3.7

1. Богданов Дж., Козин Ф. Вероятностные модели накопления повреждений. – М.: Мир, 1989. – 344 с.
2. Вибрации в технике Справочник в 6 т. – М. Машиностроение. – Т. 6. Защита от вибрации и ударов. - Под ред. К. В. Фролова. - 1981. – 456 с.
3. Крамер Г. Математические методы статистики. – М.: Мир, 1976. – 648 с.
4. Куравский Л. С., Баранов С. Н. Диагностика и прогнозирование усталостного разрушения авиационных конструкций. // В кн.: Нейрокомпьютеры в авиации (самолеты)/ Под ред. В. И. Васильева, Б. Г. Ильясова и С. Т. Кусимова: Учеб. пособие. - М.: Радиотехника, 2004. – 496 с.
5. Куравский Л. С., Баранов С. Н. Применение нейронных сетей для диагностики и прогнозирования усталостного разрушения тонкостенных конструкций. – Нейрокомпьютеры: разработка и применение, 2001, №12, с. 47-63.
6. Куравский Л. С., Баранов С. Н. Синтез сетей Маркова для прогнозирования усталостного разрушения. – Нейрокомпьютеры: разработка и применение, 2002, №11, с. 29-40.
7. Овчаров Л. А. Прикладные задачи теории массового обслуживания. – М.: Машиностроение, 1969. – 324 с.
8. Baranov S.N. and Kuravsky L.S. Acoustic vibrations: modeling, optimization and diagnostics. - 2nd Edition, enlarged. – Moscow: RUSAVIA, 2006. – 224 pp.
9. Bishop, Y. M. M., Fienberg, S. E., Holland, P. W. Discrete multivariate analysis: Theory and practice. - Cambridge, MA: M I T Press: 1975.
10. Kuravsky L. S., Baranov S. N. Condition monitoring of the structures suffered acoustic fatigue failure and forecasting their service life. – In: Proc. Condition Monitoring 2003, Oxford, United Kingdom, July 2003, pp. 256-279.
11. Kuravsky L. S., Baranov S. N. Synthesis of Markov networks for forecasting fatigue failures. – In: Proc. Condition Monitoring 2003, Oxford, United Kingdom, July 2003, pp. 76-91.
12. Kuravsky L.S. and Baranov S.N. Neural networks in fatigue damage recognition: diagnostics and statistical analysis. – In: Proc. 11th International Congress on Sound and Vibration, St.-Petersburg, Russia, July 2004, pp. 2929-2944.

РАЗДЕЛ 4. КОНЦЕПЦИЯ СИСТЕМЫ ПОДДЕРЖКИ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ ДЛЯ ПСИХОЛОГИЧЕСКОГО ТЕСТИРОВАНИЯ, ПОСТРОЕННАЯ НА БАЗЕ МАРКОВСКИХ МОДЕЛЕЙ

Представлена концепция системы поддержки принятия решений, предназначенной для оптимизации порядка предъявления заданий психологических тестов и построенной на использовании марковских моделей с непрерывным временем. Диагностические выводы строятся на основе уточняющихся в процессе тестирования вероятностных оценок принадлежности испытуемых к различным группам. Выбор очередного задания определяется для каждого испытуемого индивидуально, опираясь на результаты выполнения предыдущих и расчёты дифференцирующей способности ещё не предъявленных заданий.

4.1. ВВЕДЕНИЕ

В современных условиях не всегда удаётся обеспечивать постоянный личный контакт преподавателей психологической диагностики со студентами с целью передачи необходимого неформального профессионального опыта. Это обусловлено тем, что аудиторные занятия ограничены по времени, а число студентов достаточно велико. Для повышения эффективности преподавания используются различные средства, которые не только дают знания о правилах применения каждой конкретной методики, но и навыки корректного проведения диагностических процедур, а также наблюдений за испытуемыми. В частности, с этой целью студентам демонстрируются соответствующие видеозаписи работы авторитетных специалистов с подробными комментариями. Иногда практикуется работа студентов в парах, когда они диагностируют своих товарищей. Однако эти приёмы не обеспечивают накопления достаточного практического опыта, и тестирование остаётся затянутой по времени и трудоёмкой процедурой.

Если практикующему специалисту для принятия решений требуется относительно короткий промежуток времени, за который он сможет дать всестороннюю оценку, то сотрудники с меньшим опытом, как правило, подходят к процессу достаточно формально. Они применяют заранее заготовленный набор методик, полностью проводят их в рекомендуемом порядке, что может занимать значительное время и утомить испытуемого, исказив полученный результат.

В подобных случаях полезны системы поддержки принятия решений [14], которые ускоряют процесс тестирования, используя результаты математического моделирования. Это ускорение может быть связано, в частности, с анализом временной динамики прохождения каждого теста,

косвенно отражающей уровень способностей. Подобный инструмент даёт практикующему специалисту дополнительную информацию для анализа и предоставляет рекомендации по выбору следующего теста, обладающего, по сравнению с прочими, наибольшей для данного испытуемого дифференцирующей способностью. Такие рекомендации, не являясь обязательными и не лишая специалиста возможности получения собственного опыта, направляют его по наиболее эффективному и надёжному пути. Следует отметить, что процесс тестирования при этом не становится полностью автоматическим в силу многокомпонентности процедуры оценки способностей и наличия дополнительных неформализуемых критериев.

Перспективность и актуальность данного подхода при обучении студентов-психологов обусловлена тем, что им при работе с психометрическими методиками часто недостает наблюдений, обязательных для накопления опыта клинического и личностного анализа, что приводит к значительным затратам финансовых, временных и других ресурсов, необходимых для получения полезной информации. Несмотря на то, что интеллектуальные системы не дают навыков непосредственного общения с респондентом и соответствующего профессионального опыта, они позволяют в реальных условиях сосредоточиться на освоении важнейших особенностей практической работы с испытуемыми. К преимуществам этих систем относятся:

- удобство адаптации под любые методики;
- повышение доступности знаний, необходимых для специалиста;
- развитие навыков самостоятельной работы у студентов;
- повышение надёжности результатов тестирования;
- интенсификация процесса тестирования.

В основу математической концепции построения подобных систем и их программной реализации могут быть положены различные принципы организации и аппарат: определённые типы нейронных сетей [1-2,6,10,17], экспертные системы [3-4,12], обучаемые сети Маркова [7-9,11,16,18-19] и другие структуры. Однако сравнительный анализ показал, что перечисленные средства, за исключением марковских моделей и нейронных сетей, не обеспечивают должную универсальность и простоту адаптации к новым тестам, для каждого из которых фактически приходится разрабатывать отдельный специализированный программный продукт. Учитывая развитые возможности для вероятностного прогнозирования, отработанный аппарат идентификации [9,11,16,18] и простоту интерпретации полученных результатов, наиболее подходящим типом математических моделей для реализации поддержки принятия решений при проведении психологического тестирования, а также для организации психологического тренинга оказались марковские процессы с непрерывным временем.

В этом разделе рассмотрена концепция системы поддержки принятия решений, предназначенной для использования в процессе психологического

тестирования. Представленная концепция может быть использована при создании инструментальных средств, предназначенных для диагностики способностей и компетенций, а также организации и совершенствования процесса обучения.

4.2. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ДЛЯ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ДИНАМИКИ ПРОХОЖДЕНИЯ ТЕСТОВ

Под психологически тестом далее понимается тест, оценивающий определённые способности (например, способности к логическому мышлению или невербальный интеллект). Полагается, что ответы на вопросы заданий могут быть верными или неверными. Тесты, связанные с построением психологического профиля, и им подобные, в которых любой ответ является корректным, здесь не рассматриваются. Предполагается, что психологический тест позволяет разделить испытуемых на ряд категорий, соответствующих различным уровням исследуемого признака.

Динамика прохождения таких тестов определённым образом связана с категориями, к которым относятся испытуемые. Человек, дающий быстрые и правильные ответы на предъявляемые задания, как правило, обладает высоким уровнем оцениваемой способности. В свою очередь, долгие размышления над заданиями, как правило, свидетельствуют о неуверенности в ответах и, следовательно, относительно более низком уровне способностей.

Для описания того, как при прохождении заданного теста вероятности нахождения в заданных состояниях изменяются со временем, применяются сети Маркова, представленные на рис. 4.1. Предполагается, что тест состоит из определённого количества заданий, каждое из которых может быть выполнено правильно или не выполнено. Состояния $S_{i,+}$ ($i=1, \dots, m$) соответствуют правильному выполнению i -го задания, а $S_{i,-}$ – его невыполнению или неправильному выполнению. S_0 – начальное состояние, в котором испытуемый находится до выполнения теста. Интенсивности переходов между состояниями a, b, c, d, x, y, w и z идентифицируются отдельно для каждого уровня способностей по выборкам испытуемых, причём x, y, w и z отражают изменение способности выполнять задания теста со временем.

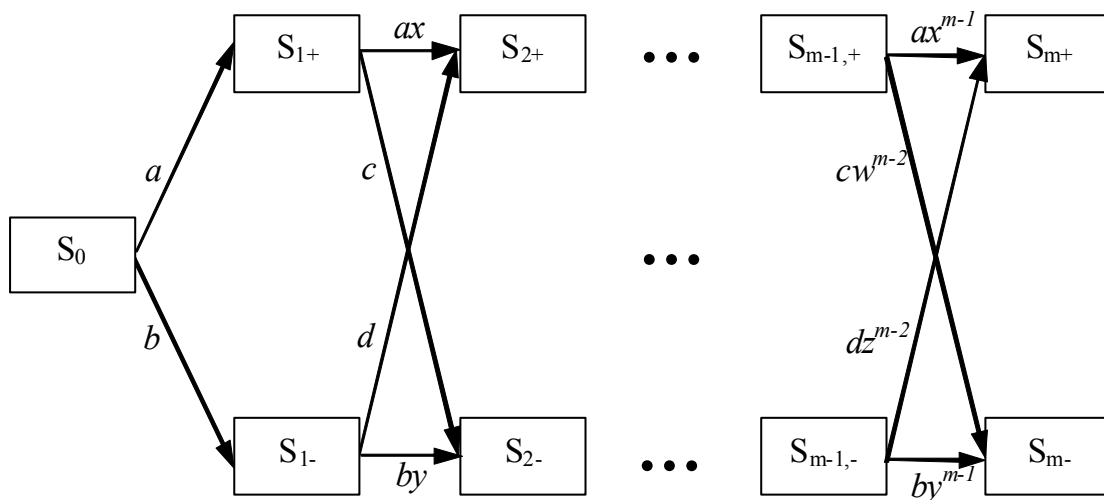


Рис. 4.1. Сеть Маркова, представляющая процесс прохождения теста из m заданий.

Динамика вероятностей пребывания в различных состояниях указанной сети описывается следующей системой обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dp_{S_0}(t)}{dt} = -(a+b)p_{S_0}(t); \\ \frac{dp_{S_{1+}}(t)}{dt} = ap_{S_0}(t) - (ax+c)p_{S_{1+}}(t); \\ \frac{dp_{S_{1-}}(t)}{dt} = bp_{S_0}(t) - (by+d)p_{S_{1-}}(t); \\ \frac{dp_{S_{2+}}(t)}{dt} = axp_{S_{1+}}(t) + dp_{S_{1-}}(t) - (ax^2+cw)p_{S_{2+}}(t); \\ \frac{dp_{S_{2-}}(t)}{dt} = byp_{S_{1-}}(t) + cp_{S_{1+}}(t) - (by^2+dz)p_{S_{2-}}(t); \\ \dots \\ \frac{dp_{S_{m-1,+}}(t)}{dt} = ax^{m-2}p_{S_{m-2,+}}(t) + dz^{m-3}p_{S_{m-2,-}}(t) - (ax^{m-1}+cw^{m-2})p_{S_{m-1,+}}(t); \\ \frac{dp_{S_{m-1,-}}(t)}{dt} = by^{m-2}p_{S_{m-2,-}}(t) + cw^{m-3}p_{S_{m-2,+}}(t) - (by^{m-1}+dz^{m-2})p_{S_{m-1,-}}(t); \\ \frac{dp_{S_{m+}}(t)}{dt} = ax^{m-1}p_{S_{m-1,+}}(t) + dz^{m-2}p_{S_{m-1,-}}(t); \\ \frac{dp_{S_{m-}}(t)}{dt} = by^{m-1}p_{S_{m-1,-}}(t) + cw^{m-2}p_{S_{m-1,+}}(t). \end{array} \right.$$

где $p_{S_*}(t)$ есть вероятность нахождения в состоянии S_* в момент времени t . В момент начала тестирования $p_{S_0}(0)=1$, а остальные вероятности пребывания в состояниях сети Маркова равны нулю.

Для упрощения решения задачи интенсивности в ряде случаев могут полагаться зависящими друг от друга. Оптимальный выбор подобных зависимостей опирается на технику проверки статистических гипотез.

При работе с тестовыми методиками, содержащими политомические задания, используются модели с более сложной структурой. В частности, в ряде тестов применялись модели, адаптированные для трёх (рис. 4.2) и четырёх (рис. 4.3) вариантов исходов выполнения заданий.

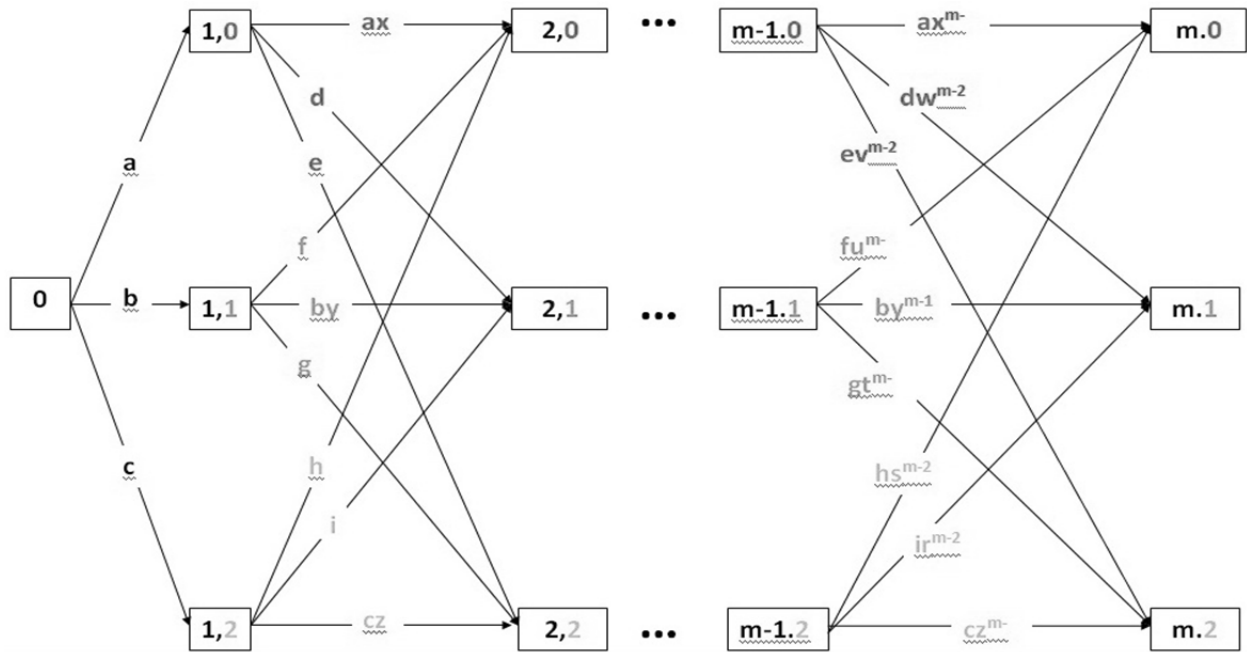


Рис. 4.2. Сеть Маркова для m заданий с тремя исходами.

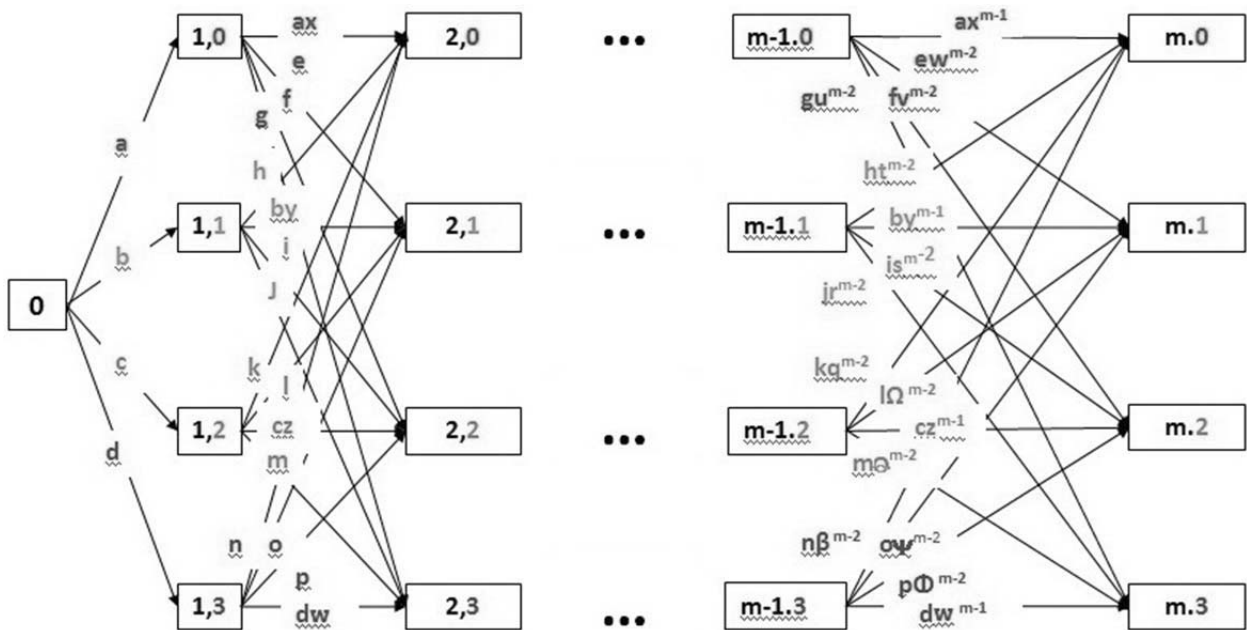


Рис. 4.3. Сеть Маркова для m заданий с четырьмя исходами.

Системы дифференциальных уравнений Колмогорова, описывающие динамику вероятностей пребывания в состояниях этих сетей, принимают следующий вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dp_{s_0}(t)}{dt} = -(a + b + c) p_{s_0}(t); \\ \frac{dp_{s_{1.0}}(t)}{dt} = ap_{s_0}(t) - (ax + d + e) p_{s_{1.0}}(t); \\ \frac{dp_{s_{1.1}}(t)}{dt} = bp_{s_0}(t) - (by + f + g) p_{s_{1.1}}(t); \\ \frac{dp_{s_{1.2}}(t)}{dt} = cp_{s_0}(t) - (cz + h + i) p_{s_{1.2}}(t); \\ \frac{dp_{s_{2.0}}(t)}{dt} = ax^{m-1} p_{s_{1.0}}(t) + fy^{m-2} p_{s_{1.1}}(t) + hs^{m-2} p_{s_{1.2}}(t) - (ax^m + dw^{m-1} + ev^{m-1}) p_{s_{2.0}}(t); \\ \frac{dp_{s_{2.1}}(t)}{dt} = by^{m-1} p_{s_{1.1}}(t) + dw^{m-2} p_{s_{1.0}}(t) + ir^{m-2} p_{s_{1.2}}(t) - (by^m + fy^{m-1} + gt^{m-1}) p_{s_{2.1}}(t); \\ \frac{dp_{s_{2.2}}(t)}{dt} = cz^{m-1} p_{s_{1.2}}(t) + ev^{m-2} p_{s_{1.0}}(t) + gt^{m-2} p_{s_{1.1}}(t) - (cz^m + hs^{m-1} + ir^{m-1}) p_{s_{2.2}}(t); \\ \dots \end{array} \right.$$

(уравнения для сети, представленной на рис. 4.2);

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dp_{s_0}(t)}{dt} = -(a + b + c + d) p_{s_0}(t); \\ \frac{dp_{s_{1.0}}(t)}{dt} = ap_{s_0}(t) - (ax + e + f + g) p_{s_{1.0}}(t); \\ \frac{dp_{s_{1.1}}(t)}{dt} = bp_{s_0}(t) - (by + h + i + j) p_{s_{1.1}}(t); \\ \frac{dp_{s_{1.2}}(t)}{dt} = cp_{s_0}(t) - (cy + k + l + m) p_{s_{1.2}}(t); \\ \frac{dp_{s_{1.3}}(t)}{dt} = dp_{s_0}(t) - (d\omega + n + o + p) p_{s_{1.3}}(t); \\ \frac{dp_{s_{2.0}}(t)}{dt} = ax^{m-1} p_{s_{1.0}}(t) + ht^{m-2} p_{s_{1.1}}(t) + kq^{m-2} p_{s_{1.2}}(t) + n\beta^{m-2} p_{s_{1.3}}(t) - (ax^m + ew^{m-1} + fv^{m-1} + gu^{m-1}) p_{s_{2.0}}(t); \\ \frac{dp_{s_{2.1}}(t)}{dt} = by^{m-1} p_{s_{1.1}}(t) + ew^{m-2} p_{s_{1.0}}(t) + l\Omega^{m-2} p_{s_{1.2}}(t) + o\Psi^{m-2} p_{s_{1.3}}(t) - (by^m + ht^{m-1} + is^{m-1} + jr^{m-1}) p_{s_{2.1}}(t); \\ \frac{dp_{s_{2.2}}(t)}{dt} = cz^{m-1} p_{s_{1.2}}(t) + fv^{m-2} p_{s_{1.0}}(t) + is^{m-2} p_{s_{1.1}}(t) + P\Phi^{m-2} p_{s_{1.3}}(t) - (cz^m + kq^{m-1} + l\Omega^{m-1} + M\Theta^{m-1}) p_{s_{2.2}}(t); \\ \frac{dp_{s_{2.3}}(t)}{dt} = d\omega^{m-1} p_{s_{1.3}}(t) + gu^{m-2} p_{s_{1.0}}(t) + jr^{m-2} p_{s_{1.1}}(t) + M\Theta^{m-2} p_{s_{1.2}}(t) - (d\omega^m + n\beta^{m-1} + o\Psi^{m-1} + P\Phi^{m-1}) p_{s_{2.3}}(t); \\ \dots \end{array} \right.$$

(уравнения для сети, представленной на рис. 4.3).

4.3. ПРОЦЕДУРА ОЦЕНКИ ЗНАНИЙ ИЛИ СПОСОБНОСТЕЙ

Процедура адаптивного тестирования заключается в последовательном предъявлении испытуемому тестов из заданного набора. Тесты не повторяются. Процедура тестирования завершается по достижении заданного условия, накладываемого на вероятность наиболее правдоподобного варианта диагноза (например, можно потребовать, чтобы эта вероятность превышала 0,7). Если указанное условие не выполняется в течение всей процедуры тестирования, то испытуемому предъявляется весь заготовленный набор тестов.

Психолог и испытуемый работают за разными компьютерами, между которыми организован обмен данными (рис. 4.4). Монитор испытуемого служит для предъявления тестов, а монитор психолога – для отображения результатов тестирования и информации, необходимой для выбора очередного теста. На мониторе испытуемого после выбора теста психологом появляется соответствующее задание, которое он пытается выполнить, сидя за своим компьютером. Испытуемый не должен видеть данные, отображаемые на мониторе психолога.



Рис. 4.4. Психолог и испытуемая в процессе тестирования.

После попытки выполнения каждого теста вычисляются:

- вероятности различных вариантов диагнозов при условиях принадлежности испытуемого к каждой из диагностируемых групп и

нахождения в контрольный момент времени в наблюдаемом состоянии сети;

- вероятности различных вариантов диагнозов при условиях принадлежности испытуемого к каждой из диагностируемых групп и нахождения по истечении заданного фиксированного интервала времени в конечном состоянии S_{m+} каждого из непредъявленных к данному моменту тестов (рис. 4.5).

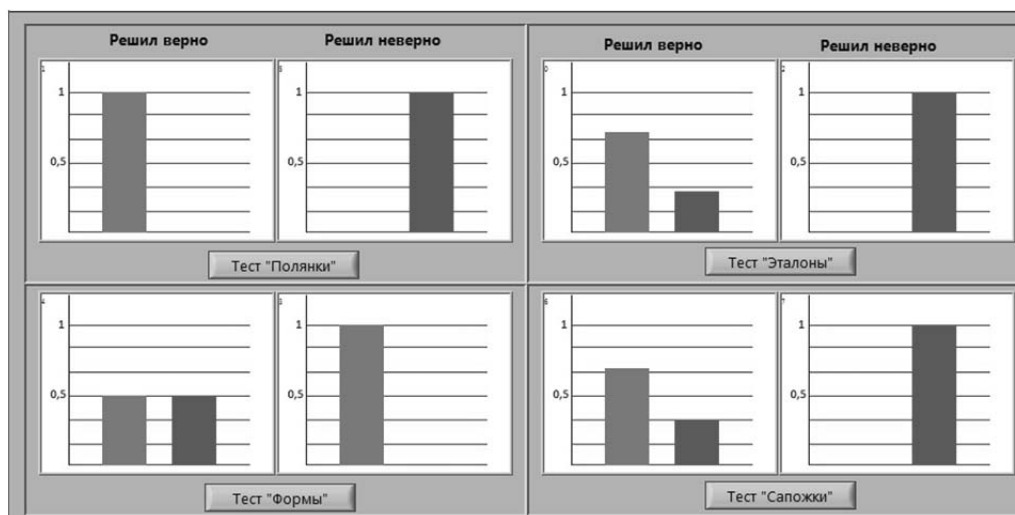


Рис.4.5. Экранная форма психолога, показывающая вероятности различных вариантов диагнозов при заданных исходах выполнения заданий.

Стратегия лица, принимающего решение о последовательности предъявления тестов, обусловлена необходимостью обеспечения за наименьшее время наибольшей дифференциации результата тестирования, представленной условием, накладываемым на вероятность наиболее правдоподобного варианта диагноза. Эта задача не имеет строго определённого решения вследствие известной неопределённости реальных действий испытуемого, включая непредсказуемое время выполнения заданий. Поэтому, при отсутствии каких-либо дополнительных аргументов, принимающему решению лицу следует, как правило, выбирать в качестве следующего такой тест, который приводит к наибольшей дифференциации самого вероятного диагноза от его остальных вариантов при условии нахождения испытуемого по истечении заранее фиксированного интервала времени в соответствующем конечном состоянии S_{m+} . Такой подход обеспечивает близкую к оптимальной последовательность прохождения тестов и допускает различные вариации процедуры тестирования в зависимости от опыта и дополнительной информации, которыми располагает психолог.

Расчёт вероятностей диагнозов при выполнении очередного теста производится по формуле Байеса. Они рассчитываются для каждого из рассматриваемых вариантов диагноза в контрольный момент времени для

наблюдаемого состояния сети, в котором испытуемый оказывается после выполнения последнего предложенного ему задания:

$$P(C_i | S) = \frac{P(C_i) P(S | C_i)}{\sum_{k=1}^I P(C_k) P(S | C_k)},$$

где C_i – событие, связанное с наличием у испытуемого i -го варианта диагноза ($i=1, \dots, I$), S – событие, связанное с нахождением в наблюдаемом состоянии сети в контрольный момент времени, $P(C_i)$ – априорная вероятность наличия у испытуемого i -го варианта диагноза, $P(S|C_i)$ – вероятность нахождения в наблюдаемом состоянии сети в контрольный момент времени при наличии i -го варианта диагноза, $P(C_i|S)$ – вероятность i -го варианта диагноза при условии нахождения в наблюдаемом состоянии сети в контрольный момент времени. Вероятности $P(S|C_i)$ вычисляются путём численного интегрирования приведённых выше уравнений Колмогорова (рис. 4.6).

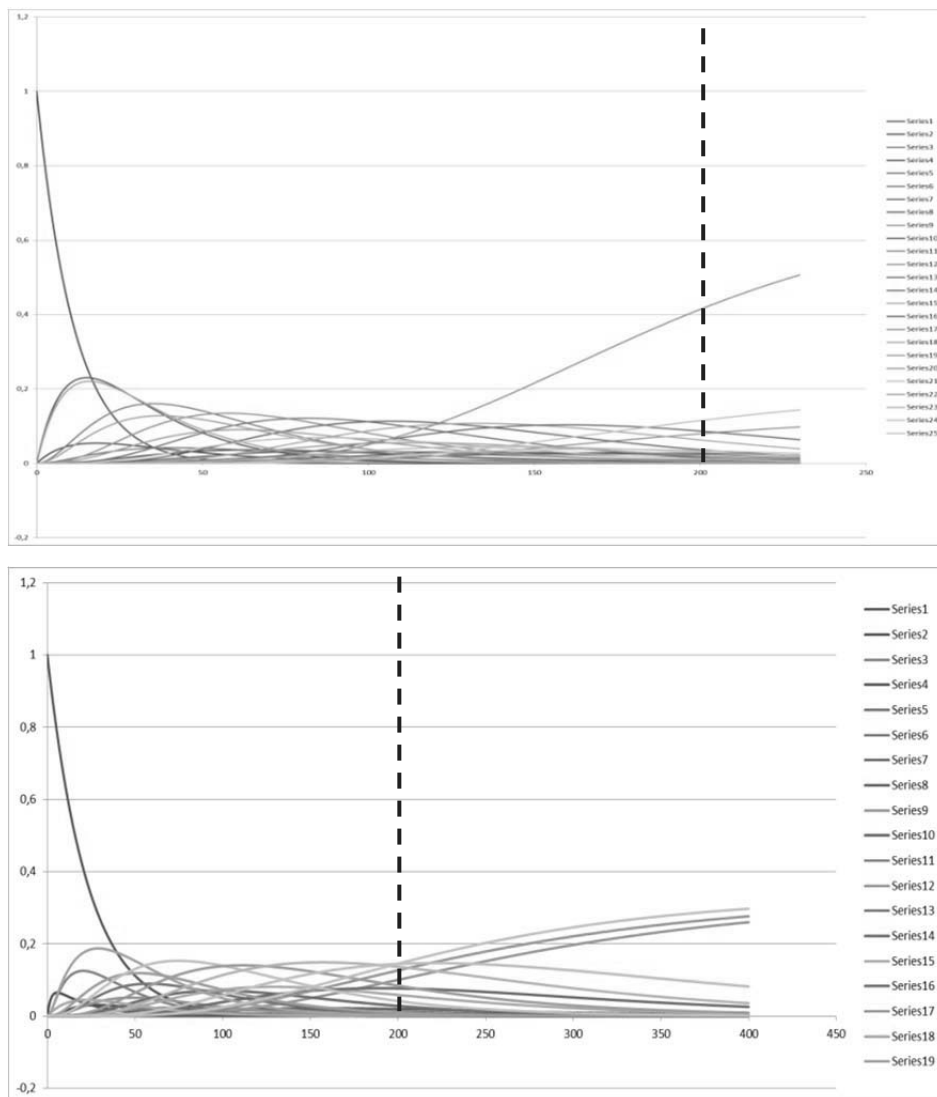


Рис.4.6. Вероятности $P(S|C_i)$, вычисленные путём численного интегрирования систем уравнений Колмогорова для двух вариантов диагнозов (пример). Контрольный момент времени показан пунктирной линией.

Вероятности нахождения по истечении заданного интервала времени в конечном состоянии S_{m+} каждого из непредъявленных тестов рассчитываются для всех рассматриваемых вариантов диагноза по аналогичной формуле:

$$P(C_i | S_f) = \frac{P(C_i) P(S_f | C_i)}{\sum_{k=1}^I P(C_k) P(S_f | C_k)},$$

где C_i – событие, связанное с наличием у испытуемого i -го варианта диагноза ($i=1, \dots, I$), S_f – событие, связанное с нахождением в состоянии S_{m+} по истечении заданного интервала времени, $P(C_i)$ – априорная вероятность наличия у испытуемого i -го варианта диагноза, $P(S_f | C_i)$ – вероятность нахождения в состоянии S_{m+} по истечении заданного интервала времени при наличии i -го варианта диагноза, $P(C_i | S_f)$ – вероятность i -го варианта диагноза при условии нахождения в состоянии S_{m+} по истечении заданного интервала времени. Вероятности $P(S_f | C_i)$, как и в предыдущем случае, вычисляются путём численного интегрирования уравнений Колмогорова. В качестве априорных вероятностей $P(C_i)$ в формулу следует подставлять вероятности $P(C_i | S)$, вычисленные по результатам прохождения последнего выполненного теста.

Наиболее вероятным вариантом диагноза является тот, при котором достигается наибольшая условная вероятность $\max_i \{P(C_i | S)\}_{i=1, \dots, I}$, вычисленная по результатам прохождения последнего выполненного теста. Распределение вероятностей $\{P(C_i | S)\}_{i=1, \dots, I}$ позволяет оценить степень надёжности этой оценки.

Вероятности $P(S | C_i)$, определённые в предыдущем разделе, могут быть вычислены путём численного интегрирования при наличии идентифицированных оценок свободных параметров a, b, c, d, x, y, w и z . Идентификации сетей Маркова проводятся по выборкам испытуемых для каждого из рассматриваемых вариантов диагноза отдельно (соответствующие процедуры рассмотрены в разделах 1.2.3 и 3.3). Каждому варианту диагноза $C_i, i=1, \dots, I$, при этом ставится в соответствие свой уникальный набор оценок параметров модели, что позволяет в дальнейшем выявлять значение этого показателя, наилучшим образом согласующегося с наблюдениями [20]. Таким образом, вероятности и интенсивности переходов являются функциями двух характеристик: варианта диагноза и трудности задачи. Число вариантов диагноза – это дискретный параметр, который задаёт разрешающую способность оценки данной характеристики и устанавливается при решении каждой прикладной задачи в зависимости от объёма выборки испытуемых, имеющейся у исследователя при решении задачи идентификации, и желаемой точности результата.

4.4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

1. Разработана концепция системы поддержки принятия решений, предназначенной для использования в процессе психологического тестирования и основанной на использовании марковских моделей с дискретными состояниями и непрерывным временем.
2. Стратегия лица, принимающего решение о последовательности предъявления тестов, обусловлена необходимостью обеспечения за наименьшее время наибольшей дифференциации результатов тестирования, представленной условием, накладываемым на вероятность наиболее правдоподобного варианта диагноза.
3. Решение о выборе последующего теста принимается на основе следующей информации, предъявляемой после попытки выполнения каждого теста и получаемой с помощью байесовских оценок:
 - вероятности различных вариантов диагнозов при условиях принадлежности испытуемого к каждой из диагностируемых групп и нахождения в контрольный момент времени в наблюдаемом состоянии сети;
 - вероятности различных вариантов диагнозов при условиях принадлежности испытуемого к каждой из диагностируемых групп и нахождения по истечении заданного фиксированного интервала времени в конечном состоянии каждого из непредъявленных к данному моменту тестов.
4. Представленная концепция может быть использована при создании инструментальных средств, предназначенных для диагностики способностей и компетенций, а также организации и совершенствования процесса обучения.

ЛИТЕРАТУРА К РАЗДЕЛУ 4

1. Галушкин А.И. Нейронные сети. Основы теории. – М.: Горячая линия-Телеком, 2010.
2. Головкин В. А. Нейронные сети: обучение, организация и применение. – Учеб. пособие. – М.: ИПРЖР, 2001.
3. Джексон П. Введение в экспертные системы: Учеб. пособие. – М.: Издательский дом «Вильямс», 2001.
4. Джонс М.Т. Программирование искусственного интеллекта в приложениях. – М.: ДМК Пресс, 2004.
5. Крамер Г. Математические методы статистики. – М.: Мир, 1976. - 648 с.
6. Куравский Л.С., Баранов С.Н. Применение нейронных сетей для диагностики и прогнозирования усталостного разрушения тонкостенных конструкций. – Нейрокомпьютеры: разработка и применение, №12, 2001, с. 47-63.

7. Куравский Л.С., Баранов С.Н. Синтез сетей Маркова для прогнозирования усталостного разрушения. – *Нейрокомпьютеры: разработка и применение*, №11, 2002, с. 29-40.
8. Куравский Л.С., Баранов С.Н., Корниенко П.А. Обучаемые многофакторные сети Маркова и их применение для исследования психологических характеристик. – *Нейрокомпьютеры: разработка и применение*, №12, 2005, с. 65-76.
9. Куравский Л.С., Баранов С.Н., Юрьев Г.А. Синтез и идентификация скрытых марковских моделей для диагностики усталостного разрушения. – *Нейрокомпьютеры: разработка и применение*, №12, 2010, с. 20-36.
10. Куравский Л.С., Марголис А.А., Юрьев Г.А. Психологический тренинг на основе нейросетевой технологии. – *Нейрокомпьютеры: разработка и применение*, №9, 2009, с. 20-26.
11. Куравский Л.С., Юрьев Г.А. Использование марковских моделей при обработке результатов тестирования. - *Вопросы психологии*, №2, 2011, с. 98-107.
12. Люгер Дж. Ф. Искусственный интеллект: стратегии и методы решения сложных проблем, 4-е издание.: Пер. с англ. – М.: Издательский дом «Вильямс», 2003.
13. Овчаров Л.А. Прикладные задачи теории массового обслуживания. – М.: Машиностроение, 1969. – 324 с.
14. Психодиагностика в России через 5 лет. – *Психология. Журнал Высшей школы экономики*, № 4, т. 5, 2008, с. 44–85.
15. Саати Т.Л. Элементы теории массового обслуживания и её приложения. – М.: ЛИБРОКОМ, , 2010. – 520 с.
16. Kuravsky L.S. and Baranov S.N. Condition monitoring of the structures suffered acoustic fatigue failure and forecasting their service life. - *Proc. Condition Monitoring 2003*, Oxford, United Kingdom, pp. 256-279, July 2003.
17. Kuravsky L.S. and Baranov S.N. Neural networks in fatigue damage recognition: diagnostics and statistical analysis. - *Proc. 11th International Congress on Sound and Vibration*, St.-Petersburg, Russia, pp. 2929-2944, July 2004.
18. Kuravsky L.S. and Baranov S.N. The concept of multifactor Markov networks and its application to forecasting and diagnostics of technical systems – In: *Proc. Condition Monitoring 2005*, Cambridge, United Kingdom, July 2005, pp. 111-117.
19. Kuravsky L.S., Baranov S.N. and Yuryev G.A. Synthesis and identification of hidden Markov models based on a novel statistical technique in condition monitoring. – In: *Proc. 7th International Conference on Condition Monitoring & Machinery Failure Prevention Technologies*, Stratford-upon-Avon, England, June 2010.
20. Kuravsky L.S., Margolis A.A., Marmalyuk P.A., Panfilova A.S., Yuryev G.A., Dumin P.N. A Probabilistic Model of Adaptive Training. - *Applied Mathematical Sciences*, Vol. 10, 2016, no. 48, 2369 – 2380, <http://dx.doi.org/10.12988/ams.2016.65168>.
21. URL: <http://www.solver.com>.

РАЗДЕЛ 5. МАРКОВСКИЕ МОДЕЛИ В ЗАДАЧАХ АДАПТИВНОГО ТЕСТИРОВАНИЯ И ОБУЧЕНИЯ

Представлены технология адаптивного тестирования, основанная на использовании обучаемых структур в форме марковских моделей, и метод фильтрации артефактов, обусловленных различными формами некорректного целенаправленного вмешательства в процедуру испытаний. Особенности представленного подхода являются выявление и использование при построении расчётных оценок временной динамики изменения способности справляться с заданиями теста, а также возможность учёта времени, затрачиваемого на решение тестовых задач. Устранение артефактов выполняется на основе сравнения наблюдаемых и прогнозируемых результатов выполнения заданий с помощью фильтра Калмана, адаптированного для решения рассматриваемой задачи. Представлен новый тест когнитивных способностей, работающий на основе предложенной концепции и имеющий существенные преимущества перед аналогами.

5.1. ТЕХНОЛОГИИ КОМПЬЮТЕРНОГО ТЕСТИРОВАНИЯ

Компьютерное тестирование в настоящее время широко используется в медицине, психологии и образовании с целью диагностики, определения уровня компетенций и пригодности испытуемых для выполнения тех или иных функций, включая контроль качества обучения. Качество тестирования и достоверность его результатов в значительной степени зависят от технологий проведения тестов, которые в последние десятилетия стали предметом активных научных исследований.

В первое время тесты строились на основе классической теории тестирования [4, 18, 21, 22], в основе которой лежит теория погрешности измерений, заимствованная из физики: полагалось, что измеряемые характеристики имеют некоторые «истинные» значения, искажаемые случайными и систематическими погрешностями. Этот подход получил определённое распространение, однако его практическому применению препятствует ряд существенных недостатков:

- возникают проблемы при сравнении сходных особенностей испытуемых, выявленных с помощью разных методик;
- не решается проблема валидности;
- тестовые баллы становятся недостаточно надёжными в областях экстремальных значений;
- технология в целом недостаточна надёжна и универсальна.

Для преодоления указанных проблем была разработана новая технология тестирования, основанная на латентно-структурном анализе и

названная *теорией ответов на вопросы* (*Item Response Theory – IRT*)⁴⁶ [18, 20]. Основная концепция новой теории, предложенная Г. Рашем в 1960 году [31] предполагает, что вероятность правильного ответа на задание определяется разностью уровня знаний или способностей и трудности теста. В зависимости от условий прикладной задачи на практике используются и другие, более сложные модели, построенные на базе данной концепции [1, 31, 32, 34].

Применение технологии *IRT* приводит к следующим проблемам:

- «статичность» оценок: игнорирование того факта, что результат тестирования вследствие усталости испытуемых и других факторов может, вообще говоря, существенно изменяться со временем, принимая различные значения в процессе сеанса тестирования;

- невозможность учёта времени, затрачиваемого на решение тестовых задач, при построении расчётных оценок;

- необходимость выполнения достаточно большого числа заданий для получения оценок с приемлемой точностью;

- сложность вычисления распределения вероятностей возможных результатов теста, что необходимо для оценки их надёжности;

- сравнительно сложная для практической реализации процедура оценки точности результата, связанная с применением метода максимального правдоподобия и расчётом доверительных интервалов.

Указанные проблемы делают актуальной разработку новых технологий тестирования. В этой работе рассматриваются новые аспекты применения разработанного ранее авторами подхода к *адаптивному тестированию* [6-14, 21-28], построенного на использовании *обучаемых структур в форме марковских моделей* с дискретным и непрерывным временем. Концепция *адаптивного тестирования* предполагает, что испытуемому с некоторой текущей расчётной оценкой уровня знаний или способностей на каждом шаге тестирования вычисляются и предлагаются задания определённой сложности, определяемой этой текущей расчётной оценкой. Особенности нового подхода, обеспечивающими преимущества перед аналогичными способами тестирования, являются:

- выявление и использование при построении расчётных оценок временной динамики изменения способности справляться с заданиями теста;

- возможность учёта при построении расчётных оценок времени, затрачиваемого на решение тестовых задач;

- возможность исследования временной динамики знаний или способностей как в дискретной, так и в непрерывной временной шкале;

- меньшее по сравнению с другими подходами число заданий, которое следует предъявлять испытуемому для получения оценок знаний или способностей с заданной точностью, что ускоряет процесс тестирования;

⁴⁶ В русскоязычной литературе также используются и другие варианты её названия: стохастическая теория тестов, математическая теория измерений, современная теория тестирования, теория латентных черт, теория характеристических кривых заданий, теория моделирования и параметризации педагогических тестов и т.д.

- получение распределения вероятностей возможных результатов теста в качестве конечного результата;
- развитая техника идентификации параметров моделей.

Одной из наиболее серьезных проблем, возникающих в процессе тестирования, является появление в истории ответов испытуемого искажающих результаты *артефактов*, обусловленных подсказками, угадыванием и другими формами некорректного целенаправленного вмешательства в процедуру испытаний. Представленная выше технология адаптивного тестирования позволяет бороться с этими явлениями, устраняя артефакты на основе сравнения наблюдаемых и прогнозируемых результатов ответов на вопросы для разных уровней способностей испытуемых. В качестве инструмента для сопоставления в данной работе предлагается использовать *фильтр Калмана* [17, 19] – нестационарную систему с обратной связью, включающая в себя как составную часть формирующий фильтр, воспроизводящий идеализированную модель поведения.

Выбор фильтра Калмана для устранения артефактов тестирования среди близких по содержанию подходов является оптимальным решением, поскольку он наилучшим образом согласуется с принятой концепцией адаптивного тестирования и контекстом её использования. В частности, этот фильтр:

- в отличие от фильтра Винера способен обрабатывать текущую информацию об ответах испытуемого в реальном времени, формируя свои оценки сразу же после получения очередного ответа и не требуя полного протокола тестирования, который недоступен до завершения всей процедуры ответов на вопросы;
- в отличие от фильтра Стратоновича использует только линейные методы оценки, наилучшим образом согласующиеся с применяемой линейной дифференциальной моделью адаптивного тестирования, и не приводит к неоправданному усложнению процесса решения;
- в отличие от фильтра Льюинбергера учитывает ошибки наблюдений и обеспечивает оптимальные оценки.

Далее рассмотрены новый подход к адаптивному тестированию, основанный на использовании марковских моделей, задача фильтрации артефактов с помощью фильтра Калмана и особенности её решения, а также представлен новый тест когнитивных способностей, работающий на основе предложенной концепции.

5.2. МАРКОВСКИЕ МОДЕЛИ АДАПТИВНОГО ТЕСТИРОВАНИЯ И ОБУЧЕНИЯ

5.2.1. Структура и математическое описание применяемых марковских моделей с непрерывным временем. Процедура оценки знаний или способностей

Оценка вероятностей различных уровней способностей проводится по результатам тестирования с использованием параметрических математических моделей, описывающихся *марковскими случайными процессами с дискретными состояниями и непрерывным и дискретным временем* [15, 16]. Дальнейшее изложение относится только к моделям с непрерывным временем. Непосредственно наблюдаемой величиной является трудность выполняемого теста, измеряемая в логитах. Допустимый диапазон значений этой величины делится на несколько интервалов, каждый из которых рассматривается как отдельное состояние x_i , $i=0,1,\dots,n$, в котором испытуемый может находиться с некоторой вероятностью, переходя из одного состояния в другое по определённым правилам. Длина указанных интервалов определяет разрешающую способность оценок, получаемых в процессе тестирования. В свою очередь, число состояний определяется желаемой разрешающей способностью оценок и доступным объемом выборки⁴⁷.

Как трудности заданий, так и способности испытуемых измеряются в единой безразмерной *шкале логитов*, выражающей соотношение долей правильных и неправильных ответов. Перевод в шкалу логитов осуществляется по формуле:

$$C = \ln \frac{r}{1-r},$$

где C – значение в шкале логитов, r – вероятность правильного выполнения задания. В случае оценки трудности этот параметр характеризует возможность выполнения определённого задания для всего множества испытуемых, а в случае оценки способностей – результаты определённого испытуемого для всего множества допустимых заданий. Статистические приближения указанных величин получаются после замены в приведённой формуле вероятности r на её выборочные оценки.

Если обозначить верхнюю и нижнюю границы диапазона возможных значений трудности тестов как D_{bot} и D_{top} , состояние x_0 будет соответствовать

⁴⁷ Рассматривая непрерывно изменяющуюся характеристику как дискретную величину, мы теряем часть информации (это имеет место при любой идеализации). Однако эти потери незначительны в случае достаточно больших выборок, когда мы имеем возможность устанавливать длину интервалов состояний так, чтобы она не превышала ошибок измерений.

интервалу от D_{bot} до $D_{bot}+(D_{top}-D_{bot})/(n+1)$, состояние x_1 – интервалу от $D_{bot}+(D_{top}-D_{bot})/(n+1)$ до $D_{bot}+2(D_{top}-D_{bot})/(n+1)$, и так далее.

Модели для описания динамики этих переходов представляются ориентированными графами, в которых вершины⁴⁸ соответствуют состояниям, а дуги⁴⁹ соответствуют переходам.

В случае моделей с непрерывным временем процесс тестирования может рассматриваться как случайное блуждание по графу с переходами из одного состояния в другое согласно направлениям дуг. Эти переходы мгновенны и происходят в случайные моменты времени.

Предполагается, что для них выполняются следующие два свойства пуассоновских потоков событий:

- *ординарность* (поток называется ординарным, если вероятность появления двух и более событий в течение малого интервала времени намного меньше, чем вероятность появления за это же время одного события);
- *независимость приращений* (это свойство означает, что количества событий, попадающих в два непересекающихся интервала, не зависят друг от друга).

Можно показать, что в рассматриваемых потоках число событий X , попадающих в любой временной интервал длины τ , начинающийся в момент t , распределено согласно закону Пуассона:

$$P_{t,\tau}(X = m) = \frac{a(t,\tau)^m}{m!} e^{-a(t,\tau)},$$

где $P_{t,\tau}(X = m)$ - вероятность появления m событий в течение рассматриваемого интервала, $a(t,\tau)$ - среднее число событий, попадающих в интервал длины τ , начинающийся в момент времени t . Далее будут рассматриваться только *стационарные потоки* (в которых $a(t,\tau)=\eta\tau$, $\eta=const$). Параметр η называется *интенсивностью стационарного потока*. Он равен среднему числу событий в единицу времени. Средняя продолжительность времени между двумя смежными событиями в этом случае равна $1/\eta$.

Упомянутые выше предположения о свойствах потоков событий обычны для прикладных задач, так как эти потоки (или потоки, близкие к ним по свойствам) часто встречаются на практике благодаря предельным теоремам для потоков событий [15, 16].

Для моделей с непрерывным временем неизвестными (свободными) параметрами модели являются интенсивности потоков событий. Их значения определяются путем сравнения наблюдаемых и прогнозируемых гистограмм,

⁴⁸ Обозначаются как прямоугольники.

⁴⁹ Обозначаются как стрелки.

описывающих распределения частот пребывания в состояниях модели, а именно: вычисляются значения, обеспечивающие наилучшее соответствие наблюдаемых и ожидаемых частот попадания в определенное состояние системы в заданные моменты времени. Прогнозируемые вероятности нахождения в состояниях получаются путем численного интегрирования систем уравнений Колмогорова.

Марковские модели с непрерывным временем и свободными параметрами, которые идентифицируются по данным наблюдений, называются *сетями Маркова* [7,9, 24-26].

Для описания того, как вероятности нахождения в заданных состояниях изменяются со временем, применяются сети Маркова, организованные по так называемой схеме «гибели и размножения»⁵⁰ (рис. 5.1). Эта схема представляет собой конечную цепь из $n+1$ состояния, в которой переходы из состояния x_k ($k \neq 0, k \neq n$) возможны только в предшествующее состояние x_{k-1} или в следующее по порядку состояние x_{k+1} . Из состояний x_0 и x_n доступны только состояния x_1 и x_{n-1} , соответственно.

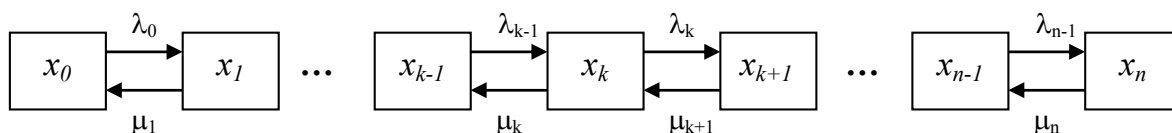


Рис. 5.1. Сеть Маркова, представляющая процесс тестирования с непрерывным временем: x_i ($i=0,1,\dots,n$) – состояния, λ_i ($i=0,1,\dots,n-1$) и μ_i ($i=1,2,\dots,n$) – интенсивности переходов.

Динамика вероятностей нахождения в различных состояниях указанной схемы описывается следующей системой обыкновенных дифференциальных уравнений Колмогорова:

$$\begin{aligned} \frac{dp_0(t)}{dt} &= -\lambda_0 p_0(t) + \mu_1 p_1(t); \\ &\dots\dots\dots \\ \frac{dp_k(t)}{dt} &= -(\lambda_k + \mu_k) p_k(t) + \lambda_{k-1} p_{k-1}(t) + \mu_{k+1} p_{k+1}(t) \\ &(k = 1, 2, \dots, n-1); \\ &\dots\dots\dots \\ \frac{dp_n(t)}{dt} &= -\mu_n p_n(t) + \lambda_{n-1} p_{n-1}(t), \end{aligned}$$

где $p_*(t)$ есть вероятность нахождения в состоянии x_* в момент времени t ; $*$ – номер состояния; λ_i ($i=0,1,\dots,n-1$) и μ_i ($i=1,2,\dots,n$) – интенсивности переходов

⁵⁰ Она была впервые применена в биологии для анализа динамики роста популяций.

между состояниями, которые определяются отдельно для каждого из рассматриваемых уровней способностей. Для интегрирования указанной системы необходимо задать начальные условия: $p_0(0), p_1(0), \dots, p_n(0)$.

Нормализующее условие $\sum_{k=0}^n p_k(t) = 1$ выполняется в любой момент времени.

Для упрощения задачи, а также для обеспечения приемлемой процедуры идентификации, интенсивности потоков часто полагаются зависящими от индекса i по определённым правилам. Оптимальный выбор подобных зависимостей опирается на технику проверки статистических гипотез. В случае моделей с дискретным временем аналогичные зависимости исследуются для вероятностей переходов.

Процедура адаптивного тестирования заключается в последовательном предъявлении испытуемому задач, трудность которых определяется состоянием сети или цепи Маркова, в котором он находится в данный момент. Если испытуемый, находясь в состоянии x_i , решает задачу, он переходит в состояние x_{i+1} , в противном случае – в состояние x_{i-1} . По завершении тестирования он оказывается в одном из состояний x_* , наилучшим образом соответствующих его уровню способностей. Принцип выбора очередного теста заключается в выборе задачи, трудность которой примерно соответствует уровню способностей испытуемого. Согласно проведённым наблюдениям и результатам современной теории тестирования это обеспечивает наилучшую *дифференциацию* испытуемых по уровню их способностей.

5.2.2. Идентификация марковских моделей с непрерывным временем

Идентификации марковских моделей проводятся по выборкам испытуемых, отдельно для каждого из рассматриваемых уровней способностей. Каждому уровню способностей $C_i, i=1, \dots, I$, при этом ставится в соответствие свой уникальный набор оценок параметров модели, что позволяет в дальнейшем выявлять значение этого показателя, наилучшим образом согласующегося с наблюдениями. Таким образом, вероятности и интенсивности переходов являются функциями двух характеристик: уровня способностей и трудности задачи. Число уровней способностей – это дискретный параметр, который задаёт разрешающую способность оценки данной характеристики и устанавливается при решении каждой прикладной задачи в зависимости от объёма выборки испытуемых, имеющейся у исследователя при решении задачи идентификации, и желаемой точности результата.

С каждой изменяющейся со временем гистограммой пребывания в состояниях модели связывается марковский процесс с дискретными состояниями. *Статистика Пирсона*

$$X^2 = \sum_{k=1}^n \frac{(F_k - p_k N)^2}{p_k N},$$

где N – число элементов в выборке, p_k – прогнозируемая вероятность попадания в k -е состояние модели, а F_k – наблюдаемая частота нахождения в k -м состоянии модели, используется как мера соответствия в том смысле, что ее большие значения означают плохое согласование прогнозируемых и наблюдаемых результатов, а малые значения – хорошее согласование. Для идентификации модели минимизируется сумма указанных статистик в те моменты времени, для которых имеются результаты наблюдений. Наблюдаемые количества попаданий в различные интервалы трудностей задач определяются по результатам тестирования группы испытуемых. В качестве искомым оценок свободных параметров моделей используются значения, обеспечивающие наилучшее соответствие наблюдаемых и прогнозируемых частот попадания в определенное состояние системы в заданные моменты времени.

Доказано, что, при выполнении ряда общих условий, значения статистики Пирсона X^2 , получаемые при подстановке истинных решений, асимптотически описываются распределением распределением χ^2 с $n - l - 1$ степенями свободы, где n – число наблюдаемых частот, а l – число определяемых параметров, причем вычисленные значения свободных параметров при увеличении объема выборки сходятся по вероятности к искомому решению [5, с.462-470]. Это позволяет использовать приведенную статистику для проверки гипотезы о том, что полученный прогноз согласуется с результатами наблюдений. Данный способ идентификации свободных параметров называется *методом минимума χ^2* [5] и даёт решения, близкие к полученным методом максимального правдоподобия [5, с.461-462].

Используемая процедура вычисления оцениваемых параметров состоит из двух этапов. На подготовительном этапе с помощью электронной таблицы для указанной системы дифференциальных уравнений кодируется численная схема интегрирования, позволяющая вычислять вероятностные функции p_k [7, 9, 24]. Эти функции вычисляются с некоторым заданным временным шагом. Для вычисления решения с приемлемой точностью оказались достаточными *методы Рунге-Кутты* или их эквиваленты.

На заключительном этапе запускается численная процедура многомерной нелинейной оптимизации⁵¹ [7, 9, 24], позволяющая получать искомые значения свободных параметров. Полученные оценки свободных параметров рассматриваются как характеристики модели, выявленные в результате наблюдений. Рассмотренный критерий также позволяет сравнивать между собой различные варианты марковских моделей, выбирая среди них оптимальные.

⁵¹ В настоящее время предлагается достаточно много программных продуктов для решения задач численной оптимизации. В частности, пользователи электронной таблицы *Excel* могут применять программное обеспечение компании *Frontline Systems, Inc.*

5.2.3. Поиск оптимального решения

Зная состояние модели, в котором оказался испытуемый после решения последней предложенной ему задачи, и рассчитав вероятность нахождения в этом состоянии в заданный момент времени для каждого из рассматриваемых уровней способностей с помощью дифференциальных зависимостей (см. раздел 5.2.1), можно оценить вероятности пребывания в указанном конечном состоянии по формуле Байеса:

$$P(C_i|S) = \frac{P(C_i)P(S|C_i)}{\sum_{k=1}^I P(C_k)P(S|C_k)},$$

где C_i – событие, связанное с наличием у испытуемого i -го уровня способностей ($i=1, \dots, I$), S – событие, связанное с нахождением в заданном конечном состоянии модели в заданный момент времени, $P(C_i)$ – априорная вероятность появления i -го уровня способностей у испытуемого, $P(S|C_i)$ – вероятность нахождения в заданном конечном состоянии модели в заданный момент времени при наличии i -го уровня способностей, $P(C_i|S)$ – вероятность i -го уровня способностей при условии нахождения в заданном конечном состоянии модели в заданный момент времени.

Уровень способностей, при котором достигается наибольшая условная вероятность

$$P(C_{max}|S) = \max_i \{P(C_i|S)\}_{i=1, \dots, I},$$

даёт искомую оценку. Распределение вероятностей $\{P(C_i|S)\}_{i=1, \dots, I}$, которое является результатом решения задачи, позволяет оценить степень надёжности этой оценки.

Как указано в разделе 5.2.1, разрешающая способность полученной оценки определяется длиной интервала между соответствующими смежными уровнями способностей в логитах, которая, в свою очередь, при условии постоянства таких длин, задаётся числом уровней способностей I .

5.3. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ПОСТАНОВКА И РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ФИЛЬТРАЦИИ КАЛМАНА ПРИ АДАПТИВНОМ ТЕСТИРОВАНИИ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ МАРКОВСКИХ МОДЕЛЕЙ

В случае обсуждаемого варианта адаптивного тестирования наблюдаемый процесс представляет историю пребывания в состояниях марковских моделей. Он выражается вектором $\mathbf{x}(t) = (x_0(t), x_1(t), \dots, x_n(t))^T$, в котором в каждый момент времени один и только один из компонентов $x_i(t)$,

$i=0, \dots, n$, соответствующий состоянию, где находится испытуемый, равен единице, а остальные компоненты равны нулю. В свою очередь, исследуемый информационный процесс $\mathbf{P}(t)=(p_0(t), p_1(t), \dots, p_n(t))^T$ представляет динамику изменения вероятностей пребывания в состояниях модели.

Уравнения информационного и наблюдаемого процессов, используемые при построении многомерного непрерывного фильтра Калмана для моделей рассматриваемого типа⁵², имеют следующий вид [17, 19]:

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = \mathbf{F}\mathbf{P},$$

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{P}(t) + \mathbf{v}(t),$$

где на случайные ошибки наблюдений $\mathbf{v}(t)$ накладываются условия $\mathbf{E}(\mathbf{v}(t)) = \mathbf{0}$ и $\mathbf{E}(\mathbf{v}(t)\mathbf{v}^T(\tau)) = \mathbf{R}\delta(t-\tau)$, матрица формирующего фильтра \mathbf{F} размерности $(n+1) \times (n+1)$ есть

$$\begin{pmatrix} -\lambda_0 & \mu_1 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 \\ \lambda_0 & -(\lambda_1 + \mu_1) & \mu_2 & \cdot & \cdot & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & \lambda_{k-1} & -(\lambda_k + \mu_k) & \mu_{k+1} & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & \lambda_{n-2} & -(\lambda_{n-1} + \mu_{n-1}) & \mu_n \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \lambda_{n-1} & -\mu_n \end{pmatrix},$$

а \mathbf{R} – симметричная положительно определённая матрица, которую мы далее будем полагать не зависящей от времени. При проведении практических расчётов эта матрица может заменяться на одну из своих выборочных оценок $\hat{\mathbf{R}}$, полученных для каждого из рассматриваемых уровней способностей на основе результатов наблюдений.

Дифференциальное уравнение фильтра Калмана, определяющее несмещённую оценку исследуемого процесса⁵³ $\hat{\mathbf{P}}(t) = (\hat{p}_0(t), \hat{p}_1(t), \dots, \hat{p}_n(t))^T$ с минимальным средним квадратом ошибки $\mathbf{e}(t) = \mathbf{P}(t) - \hat{\mathbf{P}}(t)$, представляется в виде:

$$\frac{d\hat{\mathbf{P}}(t)}{dt} = \mathbf{F}\hat{\mathbf{P}}(t) + \mathbf{K}_c(t)(\mathbf{x}(t) - \hat{\mathbf{P}}(t)),$$

⁵² Особенности этих моделей являются: отсутствие информационного шума, равенство размерностей информационного процесса и процесса наблюдений и единичная матрица наблюдений.

⁵³ Выход фильтра Калмана.

где $\mathbf{K}_c(t)$ – матричный коэффициент усиления фильтра Калмана.

В классическом случае этот коэффициент задаётся уравнением

$$\mathbf{K}_c(t) = \mathbf{U}(t)\mathbf{R}^{-1},$$

в котором ковариационная матрица ошибок $\mathbf{U}(t) = \mathbf{E}(\mathbf{e}(t)\mathbf{e}^T(t))$ является решением одной из матричных форм уравнения Риккати:

$$\frac{d\mathbf{U}(t)}{dt} = \mathbf{F}\mathbf{U}(t) + \mathbf{U}(t)\mathbf{F}^T - \mathbf{U}(t)\mathbf{R}^{-1}\mathbf{U}(t).$$

Однако, поскольку в рассматриваемой задаче компоненты оценки информационного процесса $\hat{\mathbf{P}}(t)$ представляют собой нормированные величины – вероятности пребывания в состояниях сети Маркова с суммой, равной единице, – необходима коррекция коэффициента усиления $\mathbf{K}_c(t)$, обеспечивающая поддержание данного условия.

Если нормализующее условие $\sum_{k=0}^n \hat{p}_k(t) = 1$ выполняется в начальный момент времени $t=0$, а правая часть уравнения фильтра Калмана такова, что при $t \geq 0$ обеспечивается равенство $\sum_{k=0}^n \frac{d\hat{p}_k(t)}{dt} = 0$, то указанное нормализующее

условие выполняется в любой момент времени $t \geq 0$. Очевидно, что условие $\sum_{k=0}^n \frac{d\hat{p}_k(t)}{dt} = 0$ равносильно равенству нулю суммы компонентов вектора,

заданного матричным выражением $\mathbf{F}\hat{\mathbf{P}}(t) + \mathbf{K}_c(t)(\mathbf{x}(t) - \hat{\mathbf{P}}(t))$. Поскольку нулевая сумма компонентов вектора $\mathbf{F}\hat{\mathbf{P}}(t)$ обеспечивается приведённой выше структурой матрицы \mathbf{F} , то для равенства нулю суммы компонентов всего указанного матричного выражения необходимо и достаточно нулевой суммы компонентов вектора $\mathbf{K}_c(t)(\mathbf{x}(t) - \hat{\mathbf{P}}(t))$.

Сумма компонентов вектора $\mathbf{x}(t) - \hat{\mathbf{P}}(t)$ равна нулю по условиям рассматриваемой задачи, так как эти величины интерпретируются как вероятности. Учитывая данный факт, несложно доказать, что достаточным условием нулевой суммы компонентов вектора $\mathbf{K}_c(t)(\mathbf{x}(t) - \hat{\mathbf{P}}(t))$ является равенство сумм элементов матрицы $\mathbf{K}_c(t)$ во всех её столбцах. Таким образом, если матричный коэффициент усиления $\mathbf{K}_c(t)$ в уравнении фильтра Калмана заменить на близкий к нему нормализованный коэффициент $\mathbf{K}_n(t)$ с равными во всех столбцах суммами элементов, то условие $\sum_{k=0}^n \frac{d\hat{p}_k(t)}{dt} = 0$ будет

выполнено. Матрицу $\mathbf{K}_n(t)$ можно получить, домножив справа матрицу $\mathbf{K}_c(t)$ на диагональную матрицу \mathbf{D} , элементы которой вычисляются по формуле:

$$d_{jj} = \frac{\sum_{l,m=0}^n k_{lm}}{(n+1)k_{*j}},$$

где d_{jj} – j -й диагональный элемент матрицы \mathbf{D} ; k_{lm} , $l, m=0, \dots, n$, – элементы матрицы $\mathbf{K}_c(t)$; k_{*j} – сумма элементов в j -м столбце матрицы $\mathbf{K}_c(t)$. Такая замена корректна, если $\mathbf{K}_n(t)=\mathbf{U}(t)\mathbf{R}^{-1}\mathbf{D}$ лежит в допустимых границах вариаций коэффициента $\mathbf{K}_c(t)$, обусловленных ошибками выборочных оценок матрицы \mathbf{R} , что проверяется с помощью подходящих критериев согласия.

В частности, для этого можно:

- сгенерировать множество выборочных оценок ковариационной матрицы \mathbf{R} , соответствующих доверительным интервалам для заданного объёма выборки N ,
- вычислить, используя эти оценки, выборку матриц $\{\mathbf{K}_{ni}(t)\}_{i=1, \dots, M}$,
- вычислить выборочное распределение евклидовой нормы разностей $\{\|\mathbf{K}_{ni}(t) - \mathbf{K}_c(t)\|_E\}_{i=1, \dots, M}$ классического и нормированного коэффициентов усиления,
- учитывая, что полученное выборочное распределение при достаточно большом числе элементов в матричных коэффициентах усиления приблизительно соответствует нормальному, построить для него выборочные оценки математического ожидания и дисперсии и оценить вероятность p превышения евклидовой нормы разности $\|\mathbf{K}_n(t) - \mathbf{K}_c(t)\|_E$.

Если $p \geq 0,05$, то использование нормализованного коэффициента $\mathbf{K}_n(t)$ является допустимым. Рассмотренный метод может быть совмещён с процедурой кластеризации, использующей самоорганизующиеся карты Кохонена [11, 27].

В соответствии с представленной выше процедурой адаптивного тестирования, фильтрация Калмана выполняется автономно для каждого из уровней способностей, учитываемых при постановке решаемой задачи.

В заключение следует отметить, что существует ряд интересных аналогий между фильтром Калмана и скрытыми марковскими моделями [10, 26], частично рассмотренных в обзоре [29].

5.4. ПРОГРАММНАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ

Рассмотренная процедура фильтрации реализована в среде графического программирования LabVIEW (рис. 5.2). При этом интегрирование матричного уравнения Риккати и уравнения фильтра Калмана выполнено численными методами⁵⁴, а для оценки начального

⁵⁴ Следует отметить, что процедура фильтрации, в которой $\mathbf{U}(t)$ определяется путём интегрирования уравнения Риккати, является более корректной, чем используемые в значительном числе приложений

состояния ковариационной матрицы ошибок $U(0)$, о которой наблюдения дают, как правило, мало полезной информации, использованы следующие предположения:

- $E(e(0))=0$,
- компоненты вектора ошибок фильтрации $e(0)$ статистически независимы,
- дисперсии компонентов вектора ошибок фильтрации $e(0)$ пропорциональны соответствующим дисперсиям компонентов случайного шума наблюдения $v(t)$.

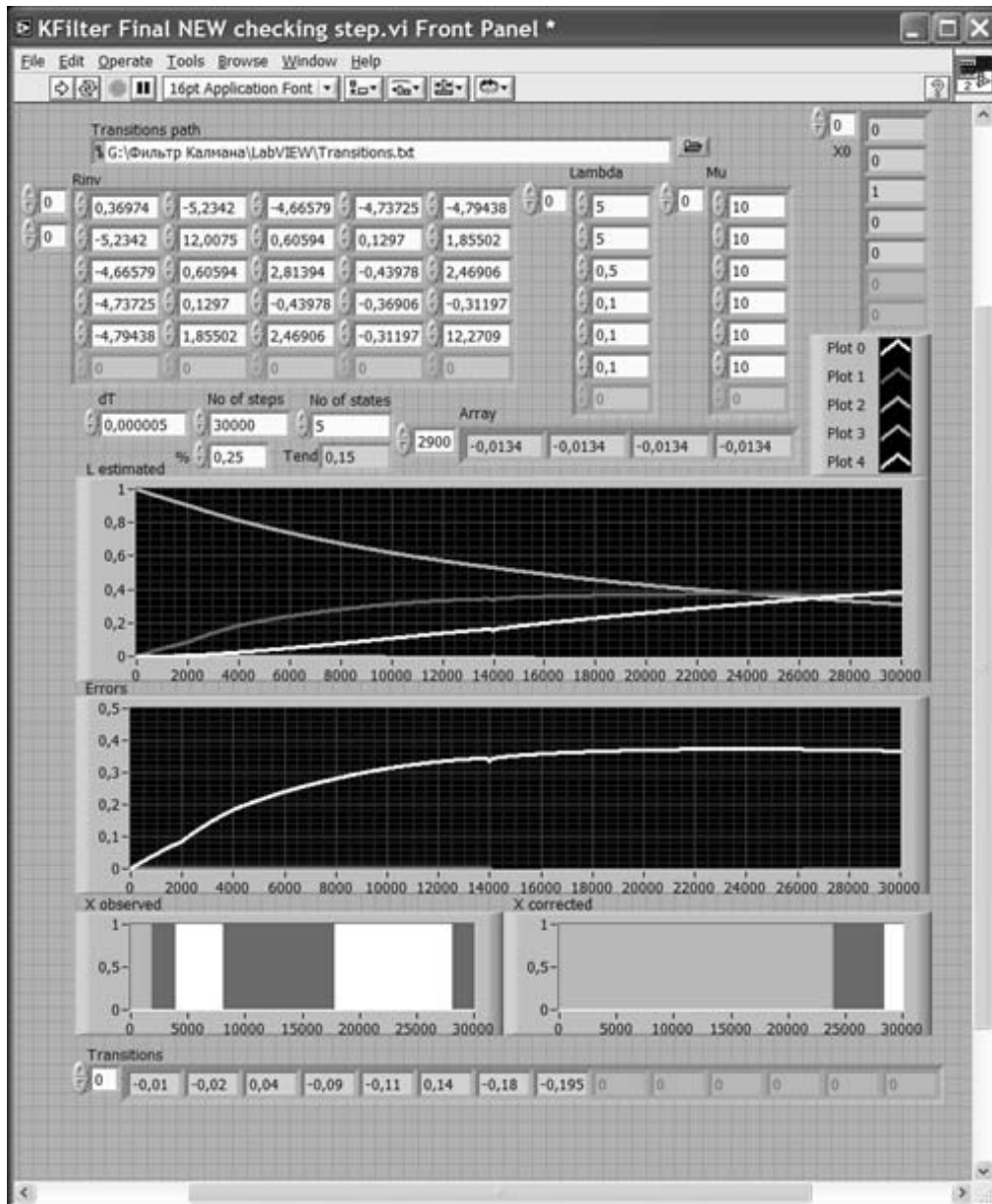


Рис. 5.2. Результаты фильтрации Калмана для марковской модели с 5-ю состояниями.

аналогичные процедуры, где $U(t)$ находится как решение уравнения $FU(t) + U(t)F^T - U(t)R^{-1}U(t) = 0$ для стационарного случая.

5.5. ЗАДАЧА АДАПТИВНОГО ОБУЧЕНИЯ

В последние годы выросла популярность электронного обучения, охватывающего, в широком смысле, практически все формы и способы передачи знаний, умений и навыков с помощью информационных и коммуникационных технологий. Этот подход к обучению имеет как известные преимущества, так и недостатки, наиболее значимые из которых обусловлены отсутствием эффективной адаптации учебного процесса к индивидуальным особенностям и возможностям его участников. Проблемы, связанные с адаптацией такого рода, сложны для решения и наиболее актуальны при обучении неформализуемым умениям и навыкам, включая решение математических, технических, алгоритмических, изобретательских и других близких по характеру задач.

В случае традиционного обучения эти проблемы обычно преодолеваются путём взаимодействия с квалифицированным преподавателем, который, учитывая известные ему особенности своих учеников, формирует для них индивидуальные траектории обучения, контролируя учебный процесс на всех его этапах. Такая работа, как правило, не поддаётся автоматизации и является своего рода искусством. Следует отметить, что указанное построение индивидуальных траекторий требует в той или иной форме решения диагностических задач, которые обеспечивают выявление особенностей и возможностей обучающихся.

Задача автоматизации адаптивного обучения неформализуемым умениям и навыкам к настоящему времени не имела удовлетворительного решения. Существующие средства организации электронного обучения, включая системы управления обучением и учебным контентом, обходят рассматриваемую проблему, решая более доступные задачи. Причина этого заключается, в первую очередь, в трудностях формализации и отсутствии подходящего математического аппарата.

Далее представлен один из подходов к решению данной задачи [11,28], опирающийся на описанную выше концепцию адаптивного тестирования. Рассмотрим модель работы *адаптивного тренажёра* (рис. 5.3), в которой задания группируются не только по трудности, но и по структурной сложности.

Содержательному уровню знаний, умений и навыков, имеющему номер k , ставятся в соответствие состояния x_k и x_{k^*} . Для каждого номера k определяется своё множество заданий соответствующего содержания. Чем правее состояние, тем шире допустимый набор знаний, умений и навыков. Состояниям с большим номером могут (но не обязаны) соответствовать задания, включающие знания, умения и навыки для состояний с меньшим номером. В общем случае, полный набор знаний, умений и навыков соответствует крайнему правому состоянию.

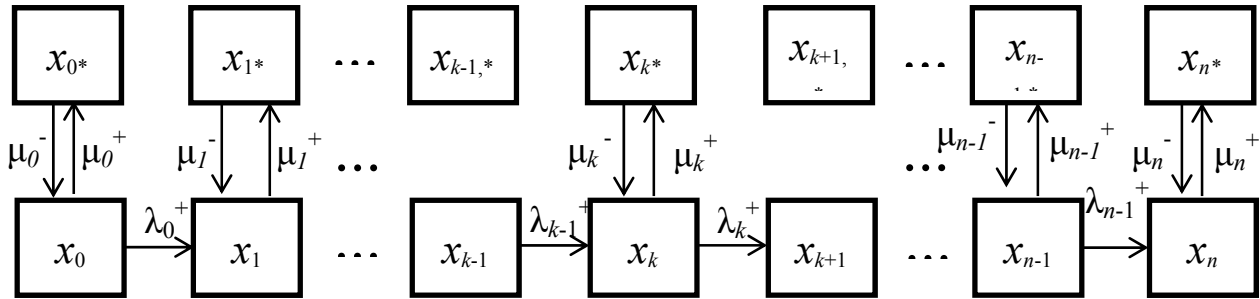


Рис.5.3. Сеть Маркова, представляющая процесс обучения: $\{x_i\}_{i=0,\dots,n}$ и $\{x_i^*\}_{i=0,\dots,n}$ – состояния марковского процесса, $\lambda = (\lambda_0^+, \dots, \lambda_{n-1}^+, \mu_0^+, \dots, \mu_n^+, \mu_0^-, \dots, \mu_n^-)^T$ – интенсивности переходов между состояниями.

Под *учащимся* далее понимается человек, проходящий обучение. Полагается, что каждый учащийся имеет один из заданных *уровней подготовки* $\{c_i\}_{i=0,\dots,z}$, где $(z+1)$ – число уровней подготовки, причём каждому из указанных уровней подготовки (например, высокому, среднему или низкому) ставятся в соответствие задания с определённым уровнем трудности. Каждому содержательному уровню знаний, умений и навыков соответствуют задания всех уровней трудности.

В случае пребывания учащегося в состоянии x_k , предъявляемое ему задание выбирается из множества, сопоставленного этому состоянию, случайным образом. Для каждого задания задаётся наибольшее допустимое время, отводимое для его выполнения.

Перемещения между состояниями определяются следующими правилами:

- если учащийся, находясь в состоянии x_k , правильно выполняет полученное задание, не превысив заданных ограничений по времени, он переходит в состояние x_{k+1} ;
- если учащийся, находясь в состоянии x_k , неправильно выполняет полученное задание, не превысив заданных ограничений по времени, он остаётся в состоянии x_k ;
- если учащийся, находясь в состоянии x_k и выполняя полученное задание, превышает заданные ограничения по времени, он переходит в состояние x_k^* ;
- если учащийся, находясь в состоянии x_k^* и выполняя полученное задание, превышает заданные ограничения по времени или неправильно выполняет полученное задание, не превысив заданных ограничений по времени, он остаётся в состоянии x_k^* ;
- если учащийся, находясь в состоянии x_k^* , правильно выполняет полученное задание, не превысив заданных ограничений по времени, он возвращается в состояние x_k .

В начальный момент времени учащийся находится в состоянии x_0 . По завершении процедуры тренажа он оказывается в одном из состояний,

наилучшим образом соответствующих его уровню знаний, умений и навыков. Тренаж завершается либо при превышении общего лимита времени, отведённого на эту процедуру, либо после успешного выполнения задания в состоянии x_n без превышения лимита времени, отведённого на это задание.

Значения свободных параметров марковских сетей идентифицируются путем сравнения наблюдаемых и прогнозируемых гистограмм, описывающих распределения частот пребывания в состояниях модели, а именно: вычисляются значения, обеспечивающие наилучшее соответствие наблюдаемых и ожидаемых частот попадания в определенное состояние системы в заданные моменты времени. При этом определяется набор интенсивностей λ , обеспечивающий наименьшее значение статистики Пирсона

$$X^2(\lambda) = \sum_{d=0}^{D-1} \sum_{i=0}^n \left[\frac{(p_i(t_d)N_d - F_{i,d})^2}{p_i(t_d)N_d} + \frac{(p_{i^*}(t_d)N_d - F_{i^*,d})^2}{p_{i^*}(t_d)N_d} \right],$$

где $F_{i,d}$ – наблюдаемые частоты пребывания в состояниях в моменты времени $\{t_d\}_{d=0, \dots, D-1}$, где i – индексы состояний рассматриваемого марковского процесса; D – количество моментов времени, в которые фиксировались частоты $F_{i,d}$; $0 \leq t_d \leq T$; T – конечный момент времени, а $N_d = \sum_{i=0}^n (F_{i,d} + F_{i^*,d})$.

Эта статистика используется как мера соответствия модели наблюдениям.

Доказано, что, при выполнении ряда общих условий, значения указанной статистики $X^2(\lambda)$, получаемые при подстановке истинных решений, асимптотически описываются распределением χ^2 с $(2n+1)D-l$ степенями свободы, где l – число идентифицируемых параметров, причем вычисленные значения свободных параметров при увеличении объема выборки сходятся по вероятности к искомому решению. Это позволяет использовать статистику Пирсона для проверки гипотезы о том, что полученный прогноз согласуется с результатами наблюдений.

Идентификация марковских моделей с непрерывным временем проводится по выборкам учащихся, отдельно для каждого из рассматриваемых уровней подготовки. Каждому уровню подготовки c_i ($i=0, \dots, z$) при этом ставится в соответствие свой уникальный набор оценок параметров модели λ , что позволяет в дальнейшем выявлять значение этого показателя, наилучшим образом согласующегося с наблюдениями.

Для выполнения соответствующей процедуры необходимо задать систему уравнений $\frac{dp(t)}{dt} = \mathbf{M}(\lambda)\mathbf{p}(t)$, начальные условия $\mathbf{p}(0)$, начальное приближение λ^0 , наблюдаемые частоты $\{F_{i,d}; F_{i^*,d}\}_{i=0, \dots, n}$ пребывания в состояниях модели, шаг интегрирования Δt для численного решения системы уравнений и точность оценки. Для решения задачи идентификации авторами разработан специальный численный метод [29]. В результате решения определяется вектор λ , доставляющий минимум функционалу $X^2(\lambda)$.

Зная состояние модели, в котором оказался тестируемый после решения последнего предложенного ему задания в определённый момент времени, и рассчитав с помощью дифференциальных зависимостей, заданных уравнениями Колмогорова, вероятность нахождения в этом состоянии в указанный момент времени для каждого из рассматриваемых уровней подготовки, можно оценить вероятности различных уровней подготовки при условии пребывания в указанном состоянии по формулам Байеса:

$$P(C_i|S) = \frac{P(C_i)P(S|C_i)}{\sum_{k=0}^z P(C_k)P(S|C_k)},$$

где C_i – событие, связанное с наличием у тестируемого i -го уровня подготовки ($i=0, \dots, z$), S – событие, связанное с нахождением в заданном состоянии модели в указанный момент времени при указанном уровне трудности заданий, $P(C_i)$ – априорная вероятность появления i -го уровня подготовки у тестируемого, $P(S|C_i)$ – вероятность нахождения в заданном состоянии эталонной модели в указанный момент времени при наличии i -го уровня подготовки, $P(C_i|S)$ – вероятность i -го уровня подготовки при условии нахождения в заданном состоянии модели в указанный момент времени.

Уровень подготовки, при котором достигается наибольшая условная вероятность $P(C_{max}|S) = \max_i \{P(C_i|S)\}_{i=0, \dots, z}$, даёт искомую оценку. Распределение вероятностей $\{P(C_i|S)\}_{i=0, \dots, z}$, которое является результатом выполнения предъявленной последовательности заданий, позволяет оценить степень надёжности полученного решения.

Сети Маркова, структура которых представлена на рис. 5.3, идентифицируются отдельно для каждого сочетания уровня подготовки и уровня трудности. Поскольку между уровнями подготовки и уровнями трудности здесь полагается взаимно-однозначное соответствие, для $z+1$ уровня подготовки требуется $(z+1)^2$ идентифицированных сетей.

Трудность задания, предъявляемого учащемуся, соответствует текущей оценке его уровня подготовки. В начальный момент тренажа предъявляется задание с самым низким уровнем трудности и самым низким содержательным уровнем. После того как учащийся, находящийся в некотором состоянии сети Маркова, завершает попытку выполнения очередного задания, вычисляются $z+1$ указанных выше байесовских оценок вероятностей принадлежности его к рассматриваемым уровням подготовки. При этом используются только те идентифицированные сети Маркова, которые соответствуют уровню трудности последнего предъявленного задания. Если наиболее вероятным оказывается уровень подготовки, не совпадающий с оценкой, сделанной после выполнения предыдущего задания, то учащемуся приписывается этот вновь вычисленный наиболее вероятный уровень подготовки, а сам он переводится в начальное состояние x_0 (происходит «сброс состояния»). Для переходов в это начальное состояние целесообразно обеспечить некоторую «инертность», выполняя их только в

том случае, если указанная наибольшая вероятность превысит оценку вероятности текущего уровня подготовки не менее чем на заданное *пороговое значение*. По завершении попыток выполнения заданий самого низкого содержательного уровня «сбросы состояний» не происходят.

Таким образом, процесс тренажа сводится к предъявлению его участникам заданий, требующих для своего решения определённых знаний, умений и навыков при наличии определённого уровня подготовки. Формальная цель тренажа – привести обучающегося в крайнее правое состояние сети Маркова, что соответствует освоению всех знаний, умений и навыков при некотором уровне подготовки. В процессе тренажа используется адаптивный принцип выбора предъявляемых заданий, согласно которому их *трудность* должна соответствовать текущей оценке уровня подготовки учащихся. Согласно проведённым наблюдениям и результатам современной теории тестирования, такой подход обеспечивает наилучшую дифференциацию учащихся по степени их подготовки.

Задания предъявляются вместе с сопутствующими им комментариями и объяснениями. На первом этапе реализации эти комментарии и объяснения могут быть в виде текстов с рисунками и формулами, которые в последующем можно заменить видеотрейкерами.

Как сети Маркова, так и указанные адаптивные переходы остаются скрытыми для учащихся, которые имеют доступ только к предъявляемым им заданиям и не знают всей сопутствующей математической подоплёки.

5.6. ПРИМЕРЫ ПРАКТИЧЕСКОГО ПРИМЕНЕНИЯ

Описанная в разделе 5.2 концепция была использована при создании теста когнитивных способностей, позволяющего комплексно оценивать способности человека к управлению сложными системами с неизвестной схемой управления. При выполнении теста испытуемому предлагается провести робототехническую платформу (рис. 5.4) по П-образному лабиринту (рис. 5.5) из фиксированного начального в фиксированное конечное положение. При этом ему доступно устройство управления (клавиатура, джойстик и т.д.) и известно, какие действия может выполнять роботизированная платформа. Для выполнения задания необходимо методом проб и ошибок выявить неизвестное соответствие между допустимыми воздействиями на органы управления и вызываемой ими реакцией управляемого объекта. Сложность и содержание этого соответствия автоматически изменяются в процессе прохождения теста в зависимости от успешности действий испытуемого. Задание считается выполненным, если платформа достигла границы лабиринта, распознав её с помощью датчика.

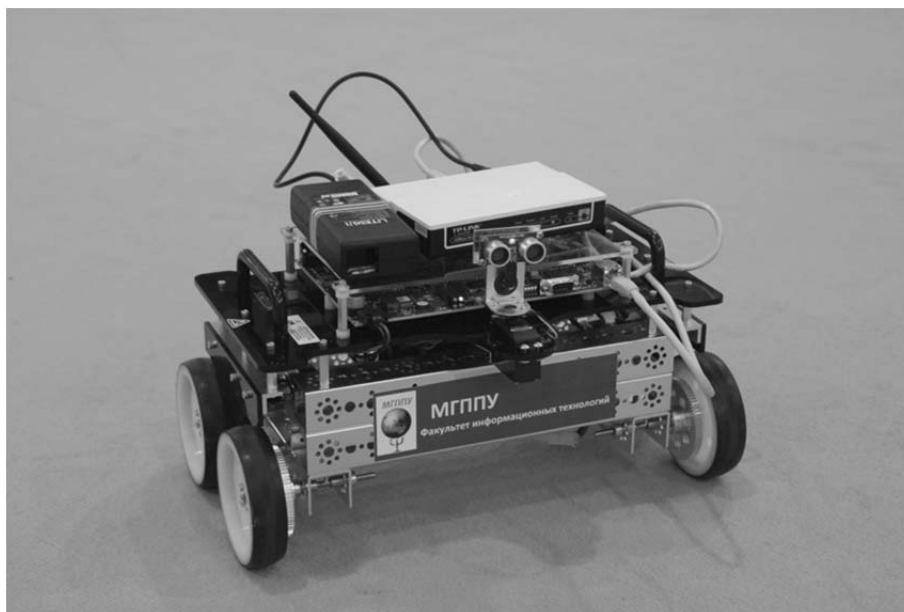


Рис. 5.4. Роботизированная платформа на базе NI LabVIEW Robotics Starter Kit собранная PITSCO на базе NI Single-Board RIO-9631.

Временные границы выполнения каждого задания определяются циклом, начинающимся со старта платформы из начального положения в лабиринте и заканчивающимся достижением платформой конечного положения. Задание считается не выполненным, если испытуемый выходит за эмпирический интервал времени, установленный для решения задач данной сложности. В соответствии с используемой концепцией, успешное выполнение приводит к усложнению следующего задания, а неверное выполнение – к его упрощению.

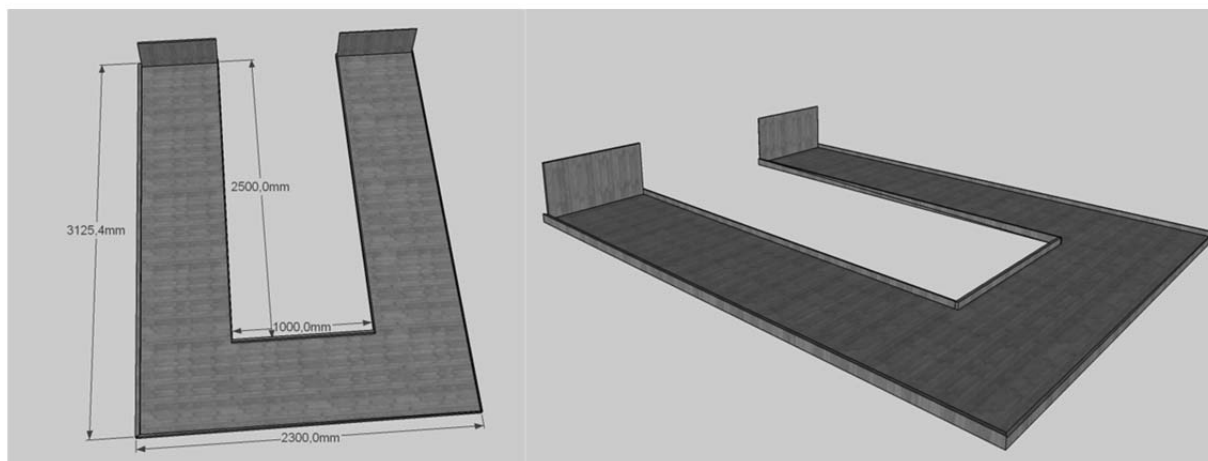


Рис. 5.5. Эскиз возможной структуры лабиринта.

Схему управления платформой при разовой попытке воздействия на органы управления можно представить как конечный автомат (рис. 5.6), который принимает конечный набор слов, количество которых определяется множеством возможных действий роботизированной платформы. В реализованном варианте возможны четыре типа таких действий: движение

назад, движение вперёд, движение влево, движение вправо. Они представлены на рис. 5.6 как конечные состояния B, F, R, L . Символы входного алфавита Σ представляют допустимые управляющие воздействия испытуемого (в реализованном варианте их также четыре).

Сложность задания определяется максимальной длиной принимаемых автоматом слов. Автомат, приведённый на рис. 5.6, принимает четыре управляющих слова, приводящих его в одно из конечных состояний из множества $\{B, F, R, L\}$. При усложнении задания максимальная длина слов, принадлежащих языку автомата, увеличивается на один символ, случайно выбранный из алфавита Σ , причём слова, полученные таким образом, должны различаться. Соответственно, в автомат при усложнении задания добавляются четыре состояния и восемь переходов.

Если испытуемый вводит слово, приводящее автомат в одно из состояний из множества $\{B, F, R, L\}$, то управляемая платформа получает команду на движение, соответствующее достигнутому состоянию. Ввод любого другого слова приводит к переходу в состояние отказа S , в котором испытуемый оповещается об ошибке управления. Попад в состояние S , следует приступать к следующей попытке воздействия на органы управления. Используемая процедура адаптивного тестирования и способ оценки его результатов приведены в разделах 5.2.1 и 5.2.3.

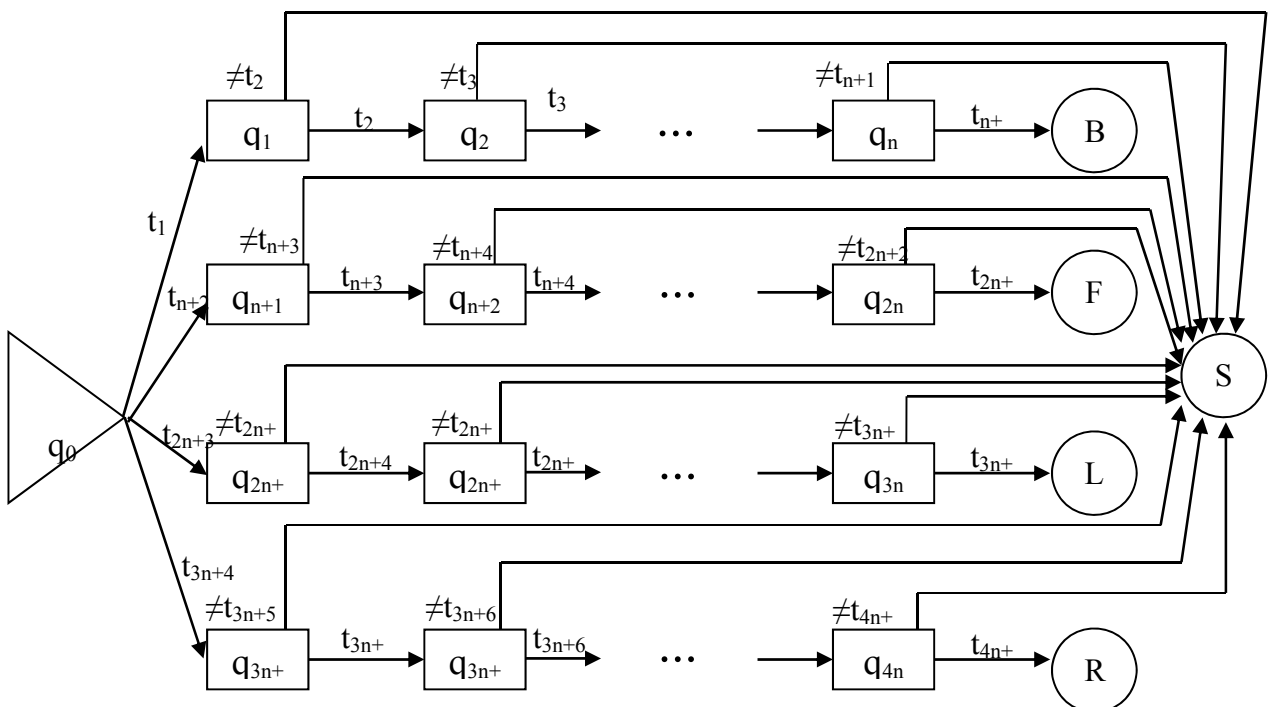


Рис. 5.6. Конечный автомат, представляющий схему управления роботизированной платформой при разовой попытке воздействия на органы управления ($\{q_0, q_1, \dots, q_{4n}, B, F, L, R, S\}$ – множество состояний; q_0 – начальное состояние; B, F, L, R, S – конечные состояния; $t_1, \dots, t_{4n+4} \in \Sigma$).

В настоящее время для решения задачи оценки когнитивных способностей чаще всего применяются две группы тестов. Первая из них

известна, как бланковые тесты интеллекта [2]. Тесты этого типа требуют от испытуемого письменных ответов на задания с выбором из списка вариантов или, для определённых классов задач, ответ даётся в свободной форме. Оценка результатов подавляющего большинства таких тестов производится в соответствии с ключом и имеющимися нормативами, заданными для различных групп испытуемых. Основным преимуществом такого рода тестов являются простота их проведения и оценки результатов.

Вторая группа тестов связана с решением более сложных задач и предполагает предъявление испытуемому своего рода математической игры [3], в которой рассматривается система со множеством скрытых факторов, определяющих сложные перекрёстные влияния различных параметров. Связи между этими параметрами определяются различными типами математических зависимостей: линейными, экспоненциальными и степенными. Целью игры является выведение заданного набора независимых параметров на определённый уровень путём изменения зависимых параметров. Для испытуемого такие задачи обычно представляются как игры по управлению определённым городом, предприятием, экосистемой и т.д. Эти задачи демонстрируют уровень мышления испытуемого, но интерпретация результатов их решения зачастую носит субъективный характер и с трудом поддаётся формализации.

В представленном выше тесте перед испытуемым ставится новый, не применявшийся ранее тип тестовых задач, а их решение разворачивается в реальном масштабе пространства и времени. Испытуемый может сразу видеть последствия своих действий, внося в них корректировку. Оценки результатов выполнения данного теста строятся на основе анализа характерных параметров выполнения заданий. Получаемые оценки в значительной степени процессуальны и распределены во времени, что лучше согласуется с особенностями процесса мышления и является очевидным преимуществом предлагаемого подхода.

Марковские модели, описанные в разделе 5.6, были реализованы в форме информационной интернет-системы, предназначенной для изучения школьного курса математики [11,28].

В данной версии адаптивного тренажёра используются содержательные уровни, определяемые разделом дисциплины, и три уровня подготовки:

- умение выполнять действия по заданному образцу (низкий уровень),
- умение выполнять мыслительные операции, включая сравнение и анализ (средний уровень),
- умение творчески формировать новые способы решения задач из имеющихся правил и предписаний (высокий уровень).

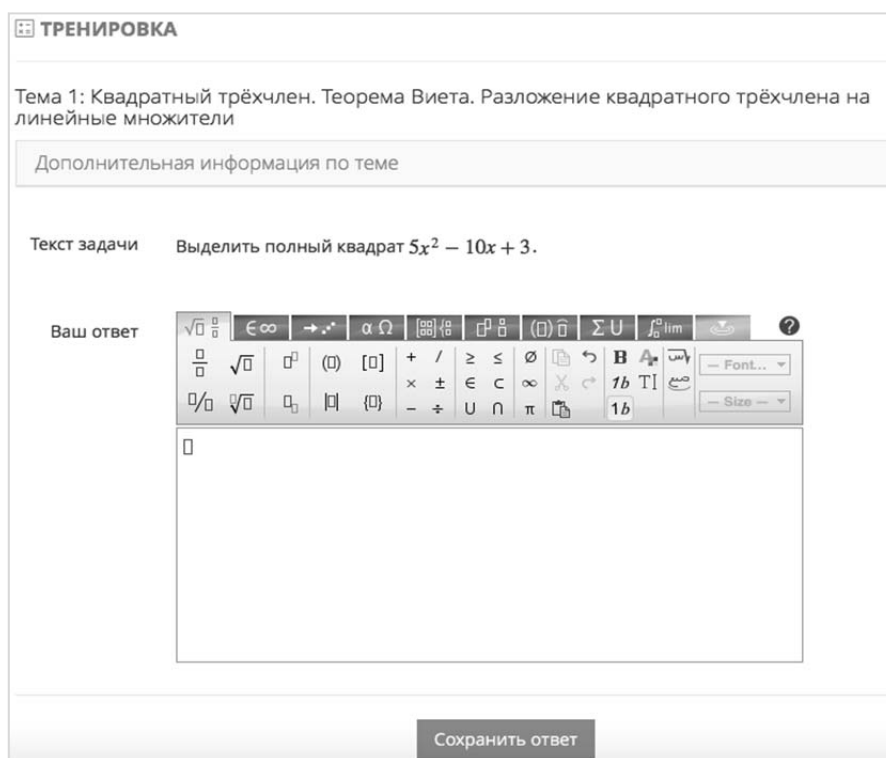


Рис.5.7. Пример задания, предъявляемого адаптивным тренажёром.

Более высокий содержательный уровень, как правило, требует знаний, умений и навыков, соответствующих предшествующим уровням (то есть – в указанном смысле – с повышением содержательного уровня происходит накопление знаний, умений и навыков). Каждому сочетанию содержательного уровня и уровня подготовки соответствует свой набор задач, как показано в таблице 5.1. Количество задач в каждом наборе должно быть достаточным для проведения нескольких сеансов тренажа для одного учащегося.

Таблица 5.1 Распределение заданий по содержательным уровням и уровням подготовки

	Содержательный уровень 0	Содержательный уровень 1	...	Содержательный уровень n
Низкий уровень подготовки (0)	Набор заданий 0.0	Набор заданий 0.1	...	Набор заданий 0.n
Средний уровень подготовки (1)	Набор заданий 1.0	Набор заданий 1.1	...	Набор заданий 1.n
Высокий уровень подготовки (2)	Набор заданий 2.0	Набор заданий 2.1	...	Набор заданий 2.n

Программная реализация обеспечивает учёт заданий, предъявленных каждому зарегистрированному учащемуся, так чтобы задания, получаемые

как во время одного сеанса тренажа, так и во время разных сеансов, не повторялись.

Тренаж начинается с получения задания из набора 0.0. Далее, полагая, что учащийся находится в текущем состоянии x_k , он, согласно представленным выше правилам, получает задания в следующем порядке:

- если учащийся вовремя справляется с очередным заданием и байесовская оценка подтверждает его принадлежность выбранному в данный момент уровню подготовки, то он сдвигается вправо вдоль строки из таблицы 5.1 и получает задание из следующего по порядку набора;
- если учащийся неправильно выполнил задание и байесовская оценка подтверждает его принадлежность выбранному в данный момент уровню подготовки, то он получает задание из того же набора, откуда было взято предыдущее (в протоколе выполнения заданий для этого учащегося делается пометка о неправильном выполнении задания, что в данном случае соответствует продолжению пребывания в состоянии x_k);
- если учащийся превысил лимит времени, отведённого для выполнения очередного задания, и байесовская оценка подтверждает его принадлежность выбранному в данный момент уровню подготовки, то он получает задание из того же набора, откуда было взято предыдущее (в протоколе выполнения заданий для этого учащегося делается пометка о превышении лимита времени, что в данном случае соответствует переходу в состояние x_{k*});
- если байесовская оценка не подтверждает принадлежность учащегося выбранному в данный момент уровню подготовки и содержательный уровень предъявленного задания не является самым низким, то происходит «сброс состояния»: учащийся получает очередное задание из набора таблицы 5.1, находящегося на пересечении столбца, соответствующего уровню 0, и строки, соответствующей наиболее вероятному уровню подготовки.

Полагая, что учащийся находится в текущем состоянии x_{k*} , он, согласно представленным выше правилам, получает задания в следующем порядке:

- если учащийся вовремя справляется с очередным заданием и байесовская оценка подтверждает его принадлежность выбранному в данный момент уровню подготовки, он получает задание из того же набора, откуда было взято предыдущее (в данном случае это соответствует переходу в состояние x_k);
- если учащийся неправильно выполнил задание и байесовская оценка подтверждает его принадлежность выбранному в данный момент уровню подготовки, то он получает задание из того же набора, откуда было взято предыдущее (в протоколе выполнения заданий для этого учащегося делается пометка о неправильном выполнении задания, что

в данном случае соответствует дальнейшему пребыванию в состоянии x_{k^*});

- если учащийся превысил лимит времени, отведённого для выполнения очередного задания, и байесовская оценка подтверждает его принадлежность выбранному в данный момент уровню подготовки, то он получает задание из того же набора, откуда было взято предыдущее (в протоколе выполнения заданий для этого учащегося делается пометка о превышении лимита времени, что в данном случае соответствует дальнейшему пребыванию в состоянии x_{k^*});
- если байесовская оценка не подтверждает принадлежность учащегося выбранному в данный момент уровню подготовки и содержательный уровень предъявленного задания не является самым низким, то происходит «сброс состояния»: учащийся получает очередное задание из набора таблицы 5.1, находящегося на пересечении столбца, соответствующего уровню 0, и строки, соответствующей наиболее вероятному уровню подготовки.

По завершении попыток выполнения заданий, соответствующих высокому уровню подготовки, учитывая их творческий характер, «сбросы состояний» не выполняются.

Для обеспечения разумной «инертности» переходов, «сброс состояния» выполняется только в том случае, если наибольшая вероятность превысит оценку вероятности текущего уровня подготовки не менее чем на заданное пороговое значение, которое полагается равным 0,05.

Тренаж завершается либо при превышении заданного общего лимита времени, либо после успешного выполнения задания из любой строки последнего столбца таблицы 5.1 без превышения лимита времени, отведённого на это задание.

При идентификации параметров сетей Маркова «сбросов состояния» не происходит: вся процедура тренажа в контрольных группах учащихся проходит на заданиях, соответствующих одному и тому же уровню трудности. Поскольку уровень трудности не меняется, то байесовские оценки при идентификации не вычисляются. Всего требуется идентифицировать 9 эталонных сетей Маркова: каждая сеть определяется сочетанием одного из трёх заданных уровней подготовки учащихся и трёх соответствующих им уровней трудности заданий. В рассматриваемом случае, когда допускается высокий, средний или низкий уровень подготовки, необходимо автономно идентифицировать:

- сети, представляющие процесс выполнения заданий учащимися с высоким уровнем подготовки для заданий низкого, среднего и высокого уровня трудности;
- сети, представляющие процесс выполнения заданий учащимися со средним уровнем подготовки для заданий низкого, среднего и высокого уровня трудности;

- сети, представляющие процесс выполнения заданий учащимися с низким уровнем подготовки для заданий низкого, среднего и высокого уровня трудности.

При получении очередного задания учащемуся сообщаются темы, определяющие содержательный уровень этого задания.

Для отображения формул, записи ответов учащихся и хранения корректных ответов выбран синтаксис *LaTeX* и библиотека *MathJax*, интерпретирующая этот синтаксис и позволяющая сформировать представление уравнений в браузере пользователя. Учащемуся предлагается непосредственно вводить решение в соответствующее поле, поскольку такой формат ответа позволяет избежать угадывания и решения проблемы подбора дистракторов. На рис. 5.8 представлено окно редактора формул, позволяющее использовать различные математические символы при записи решения.

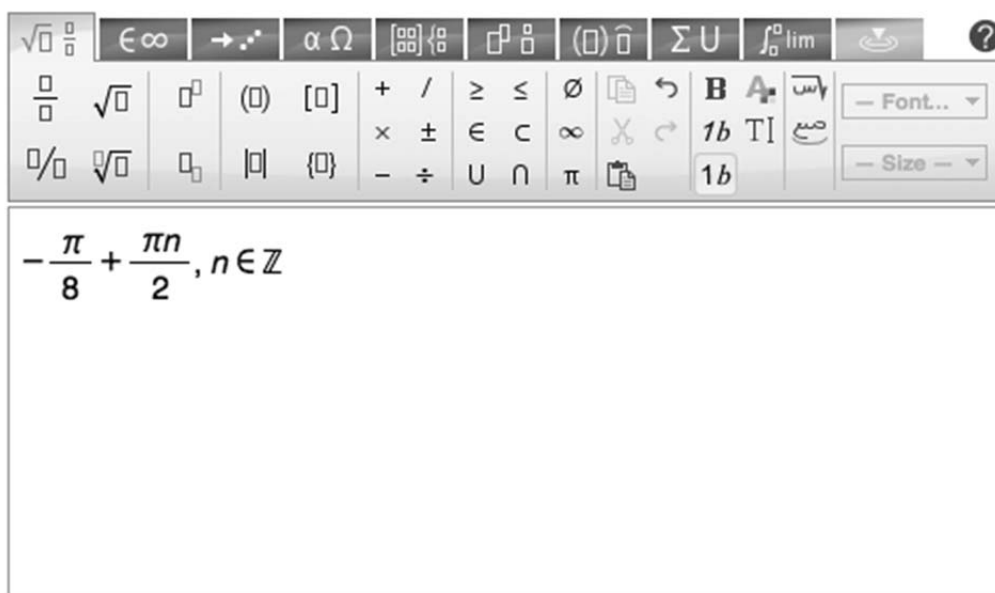


Рис. 5.8. Редактор формул.

Автоматическая проверка корректности ответов реализуется с использованием *API* сервиса *WolframAlpha* [33], поддерживающего синтаксис *LaTeX*. Для проверки ответов на задания различного типа разработан ряд модулей, использующих методы системы *WolframAlpha*, и ряд алгоритмов сверки ответов. Разработан функционал, позволяющий администратору проверить корректность интерпретации системой различных вариантов ответов на задания.

Администратору системы доступна информация о результатах тренировок и причинах их завершения в виде графиков, диаграмм и таблиц, а также подробные сведения о каждом тренаже, решениях задач и показателях, на основании которых система принимает решение о параметрах следующего задания.

5.7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

1. Разработана новая технология адаптивного тестирования, основанная на использовании обучаемых структур в форме марковских моделей. Значения свободных параметров этих моделей идентифицируются с использованием наблюдаемых и прогнозируемых гистограмм, описывающих распределения частот пребывания в состояниях моделей. Принадлежность к различным уровням подготовки определяется с помощью байесовских оценок.
2. Предложенный подход имеет преимущества по сравнению с использованными ранее способами тестирования, что обусловлено его большей информативностью, связанной с учётом влияния фактора времени на результаты тестирования, а также ускорением прохождения тестов, которые становятся менее утомительными для испытуемых.
3. Разработан и программно реализован вероятностный метод фильтрации артефактов, искажающих результаты адаптивного тестирования. Устранение артефактов, обусловленных различными формами некорректного целенаправленного вмешательства в процедуру испытаний, выполняется на основе сравнения наблюдаемых и прогнозируемых результатов прохождения теста для разных уровней способностей испытуемых с помощью фильтра Калмана, приспособленного для решения задачи адаптивного тестирования.
4. Выбор фильтра Калмана для устранения артефактов является оптимальным среди близких по содержанию подходов, поскольку он наилучшим образом согласуется с принятой концепцией адаптивного тестирования и контекстом её использования.
5. Разработан и программно реализован тест когнитивных способностей, работающий на основе предложенной концепции и имеющий существенные преимущества перед аналогами.
6. Разработана и программно реализована в виде информационной интернет-системы концепция адаптивного тренажёра, обеспечивающего выбор заданий с помощью параметрических моделей, описывающихся марковскими процессами с дискретными состояниями и непрерывным временем.

ЛИТЕРАТУРА К РАЗДЕЛУ 5

1. Аванесов В.С. Педагогическое измерение латентных качеств. - Педагогическая диагностика, 2003, №4, с.69-78.
2. Анастаси, А., Урбина, С. Психологическое тестирование. – СПб.: Питер, 2001.
3. Дёрнер Д. Логика неудачи: стратегическое мышление в сложных ситуациях. – М.: Смысл, 1997.

4. Карданова Е.Ю. Моделирование и параметризация тестов: основы теории и приложения. - ФГУ «Федеральный центр тестирования», 2008.
5. Крамер Г. Математические методы статистики. – М.: Мир, 1976. - 648 с.
6. Куравский Л. С., Баранов С. Н. Синтез сетей Маркова для прогнозирования усталостного разрушения. – Нейрокомпьютеры: разработка и применение, 2002, №11, с. 29-40.
7. Куравский Л.С., Баранов С.Н. Применение нейронных сетей для диагностики и прогнозирования усталостного разрушения тонкостенных конструкций. //Нейрокомпьютеры: разработка и применение, 2001, №12, с. 47-63.
8. Куравский Л.С., Баранов С.Н., Корниенко П.А. Обучаемые многофакторные сети Маркова и их применение для исследования психологических характеристик. // Нейрокомпьютеры: разработка и применение, №12, 2005. – с. 65-76.
9. Куравский Л.С., Баранов С.Н., Малых С.Б. Нейронные сети в задачах прогнозирования, диагностики и анализа данных: Учеб. пособие. – М.: РУСАВИА, 2003. – 100 с.
10. Куравский Л.С., Баранов С.Н., Юрьев Г.А. Синтез и идентификация скрытых марковских моделей для диагностики усталостного разрушения. //Нейрокомпьютеры: разработка и применение, №12, 2010, с. 20-36.
11. Куравский Л.С., Марголис А.А., Мармалюк П.А., Панфилова А.С., Юрьев Г.А. Математические аспекты концепции адаптивного тренажера. // Психологическая наука и образование, №2, 2016, с. 84-95 DOI: [10.17759/pse.2016210210](https://doi.org/10.17759/pse.2016210210).
12. Куравский Л.С., Марголис А.А., Мармалюк П.А., Юрьев Г.А., Думин П.Н. Обучаемые марковские модели в задачах оптимизации порядка предъявления психологических тестов // Нейрокомпьютеры: разработка и применение. 2013. № 4. С. 28–38.
13. Куравский Л.С., Юрьев Г.А. Адаптивное тестирование как марковский процесс: модели и их идентификация. // Нейрокомпьютеры: разработка и применение, №2, 2011, с. 21-29.
14. Куравский Л.С., Юрьев Г.А. Использование марковских моделей при обработке результатов тестирования. //Вопросы психологии, №2, 2011, с. 98-107.
15. Овчаров Л.А. Прикладные задачи теории массового обслуживания. – М.: Машиностроение, 1969. – 324 с.
16. Саати Т.Л. Элементы теории массового обслуживания и её приложения. – М.: ЛИБРОКОМ, , 2010. – 520 с.
17. Тихонов В.И., Шахтарин Б.И., Сизых В.В. Случайные процессы. Примеры и задачи. /Т.5. Оценка сигналов, их параметров и спектров. Основы теории информации. – М.: Горячая линия–Телеком, 2009. – 400 с.
18. Тюменева Ю.А. Психологическое измерение. – М.: Аспект-Пресс, 2007.
19. Шахтарин Б.И. Случайные процессы в радиотехнике. /Т.1. Линейные преобразования. – М.: Горячая линия–Телеком, 2010. – 520 с.

20. Baker F.B. The Basics of Item Response Theory. ERIC Clearinghouse on Assessment and Evaluation, University of Maryland, College Park, MD, 2001.
21. Gregory R.J. Psychological testing: History, principles, and applications (5th edition). - New York: Pearson, 2007.
22. Gulliksen H. Theory of Mental Tests. - John Wiley & Sons Inc, 1950.
23. Kuravsky L. S., Malykh S. B. Application of Markov models for analysis of development of psychological characteristics. - Australian Journal of Educational & Developmental Psychology, 2004, Vol 2, pp 29-40.
24. Kuravsky L.S. and Baranov S.N. Condition monitoring of the structures suffered acoustic fatigue failure and forecasting their service life. - Proc. Condition Monitoring 2003, Oxford, United Kingdom, pp. 256-279, July 2003.
25. Kuravsky L.S. and Baranov S.N. Neural networks in fatigue damage recognition: diagnostics and statistical analysis. - Proc. 11th International Congress on Sound and Vibration, St.-Petersburg, Russia, pp. 2929-2944, July 2004.
26. Kuravsky L.S. and Baranov S.N. The concept of multifactor Markov networks and its application to forecasting and diagnostics of technical systems. – In: Proc. Condition Monitoring 2005, Cambridge, United Kingdom, pp. 111-117, July 2005.
27. Kuravsky L.S., Baranov S.N. and Yuryev G.A. Synthesis and identification of hidden Markov models based on a novel statistical technique in condition monitoring. – In: Proc. 7th International Conference on Condition Monitoring & Machinery Failure Prevention Technologies, Stratford-upon-Avon, England, June 2010. – 23 pp.
28. Kuravsky L.S., Margolis A.A., Marmalyuk P.A., Panfilova A.S., Yurev G.A., Dumin P.N. A probabilistic model of adaptive training - Applied Mathematical Sciences. 2016. T. 10. № 48. C. 2369-2380 DOI: 10.12988/ams.2016.65168
29. Kuravsky L. S., Marmalyuk P. A., Yuryev G. A. and Dumin P. N. A Numerical Technique for the Identification of Discrete-State Continuous-Time Markov Models // Applied Mathematical Sciences. Vol. 9. 2015. №8. pp. 379–391. URL: <http://dx.doi.org/10.12988/ams.2015.410882>.
30. Kuravsky L. S., Marmalyuk P. A., Yuryev G. A., Dumin P. N. and Panfilova A. S. Probabilistic Modeling of a Testing Procedure - Applied Mathematical Sciences. Vol. 9. 2015. №82. pp. 4053–4066. URL: <http://dx.doi.org/10.12988/ams.2015.53234>.
31. Rasch, G. Probabilistic models for some intelligence and attainment tests. // Copenhagen, Danish Institute for Educational Research, expanded edition (1980) with foreword and afterword by B.D. Wright. Chicago: The University of Chicago Press. 1960/1980
32. Roweis, S. and Ghahramani, Z. A unifying review of linear Gaussian models. – Neural Computation, Vol. 11, No. 2, 1999, pp. 305–345.
33. Wolfram Alpha Webservice API [Электронный ресурс] // Wolfram Alpha LLC – A Wolfram Research Company. URL:

<http://products.wolframalpha.com/api/documentation.html> (дата обращения 21.01.2016).

34. Wright B.D., Masters G.N. Rating scale analysis. Rasch measurements. – Chicago: MESA Press, 1982.

35. Wright B.D., Stone M.N. Best Test Design. - Chicago: MESA Press, 1979.

РАЗДЕЛ 6. МАРКОВСКИЕ МОДЕЛИ УПРАВЛЕНИЯ ПРИКЛАДНЫМИ МНОГОАГЕНТНЫМИ СИСТЕМАМИ

Описана вероятностная модель поведения прикладной многоагентной системы, представляющей игровое взаимодействие множества агентов и цели. Поведение агентов является недетерминированным и, поэтому, непредсказуемым с точки зрения цели. Система допускает как согласованное, так и автономное поведение агентов, в зависимости от того, получают или нет агенты информацию о наличии и положении других работоспособных агентов. Поведение агента определяется алгоритмом, который предусматривает идентификацию параметров вероятностной модели с использованием оптимизируемых целевых функций, выражающих групповую и индивидуальные вероятности поражения цели. Разработанная модель и алгоритм позволяют обеспечивать управление поведением релевантных прикладных многоагентных систем.

6.1. ВВЕДЕНИЕ

Проблемы коллективного поведения и группового управления привлекают внимание исследователей более полувека [1, 3, 8, 10–11]. Их значимость значительно возросла в последние годы в связи с актуальностью таких задач, как управление коллективом роботов, управление полетом и выполнением миссии группы беспилотных летательных аппаратов и других мобильных систем. Особенно трудными являются задачи управления группами подвижных объектов, которые должны координировать свое поведение в пространстве и кооперироваться для достижения заданного результата.

За прошедшее время подходы к решению подобных задач значительно изменились, требуя, в частности, новых способов формализации, математических моделей и алгоритмов адаптивного управления поведением прикладных распределённых многоагентных систем. Исследования и разработки в этой области ведутся во многих странах, привлекая большое количество специалистов. Концепции, базовые понятия, принципы построения, перспективы практического применения и другие аспекты создания подобных систем рассмотрены во многих современных работах [1, 8]. Разработана теория динамических интеллектуальных систем, основанных на правилах, исследованы вопросы их устойчивости и управляемости [7–8]. Однако достаточно развитый математический аппарат, приемлемый для практического управления поведением группы составляющих систему агентов, к настоящему времени в полном объёме пока не создан.

В этом разделе мы рассмотрим модель поведения прикладной системы, представляющей игровое взаимодействие множества агентов и цели, которая опирается на описание движения агентов марковскими случайными

процессами с дискретными состояниями и непрерывным временем, а также на методы и подходы к решению различных задач, рассмотренные в работах [2, 4, 5, 12–15]. Поведение агентов является недетерминированным и, поэтому, непредсказуемым с точки зрения цели. Система допускает как согласованное, так и автономное поведение агентов, в зависимости от того, получают или нет агенты информацию о наличии и положении других работоспособных агентов. Поведение агента детализируется алгоритмом, который предусматривает идентификацию параметров вероятностной модели с использованием оптимизируемых целевых функций, выражающих групповую и индивидуальные вероятности поражения цели.

6.2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Агенты L_k ($k = 0, \dots, K - 1$) перемещаются по плоскому игровому полю, на котором находится одна неподвижная цель T , согласно представленным далее правилам, стараясь поразить цель. Для определения их положения вводится разбиение области поверхности, прилегающей к цели, на ячейки, образованные пересечением m концентрических колец и n секторов, причём цель T находится в центре внутреннего кольца (рис. 6.1). Положение агентов определяется с точностью до ячейки (i, j) , индексы которой задаются номером кольца i ($i = 0, \dots, M - 1$) и номером сектора j ($j = 0, \dots, N - 1$). Вероятность пребывания агента L_k в ячейке (i, j) в момент времени t описывается функцией $p_{k,ij}(t)$.

В дискретные моменты времени, разделённые *интервалом дискретизации* Δt , агент L_k может атаковать и, возможно, поразить цель T , а также быть атакованным и, возможно, поражённым этой целью с определёнными вероятностями, зависящими от его положения. Задаются пороговые вероятности индивидуальной p_t и коллективной p_{tn} атаки цели, пороговая вероятность завершения игры p_{tmax} , наибольшая допустимая вероятность поражения агентов p_B и наибольшая допустимая скорость перемещения агентов по игровому полю v_{max} , а также число агентов B , одновременно атакуемых целью.

В каждый дискретный момент времени все работоспособные агенты располагают информацией о том, в каких ячейках они находятся. В зависимости от игровой ситуации, в указанные моменты времени агенты могут получать или не получать информацию о наличии и положении других работоспособных агентов.

Изменение распределения и состава агентов на игровом поле, произошедшее при переходе от одного дискретного момента времени к другому моменту, следующему за ним по порядку с интервалом Δt , будем называть *тактом игры*.

В зависимости от возможностей агентов получать релевантную информацию, *условием завершения игры* является превышение расчётной

вероятностью поражения цели заданного порога, получение информации о поражении цели или поражение целью всех агентов. Первые два исхода игры рассматриваются как *победа агентов*, а третий – как *победа цели*.

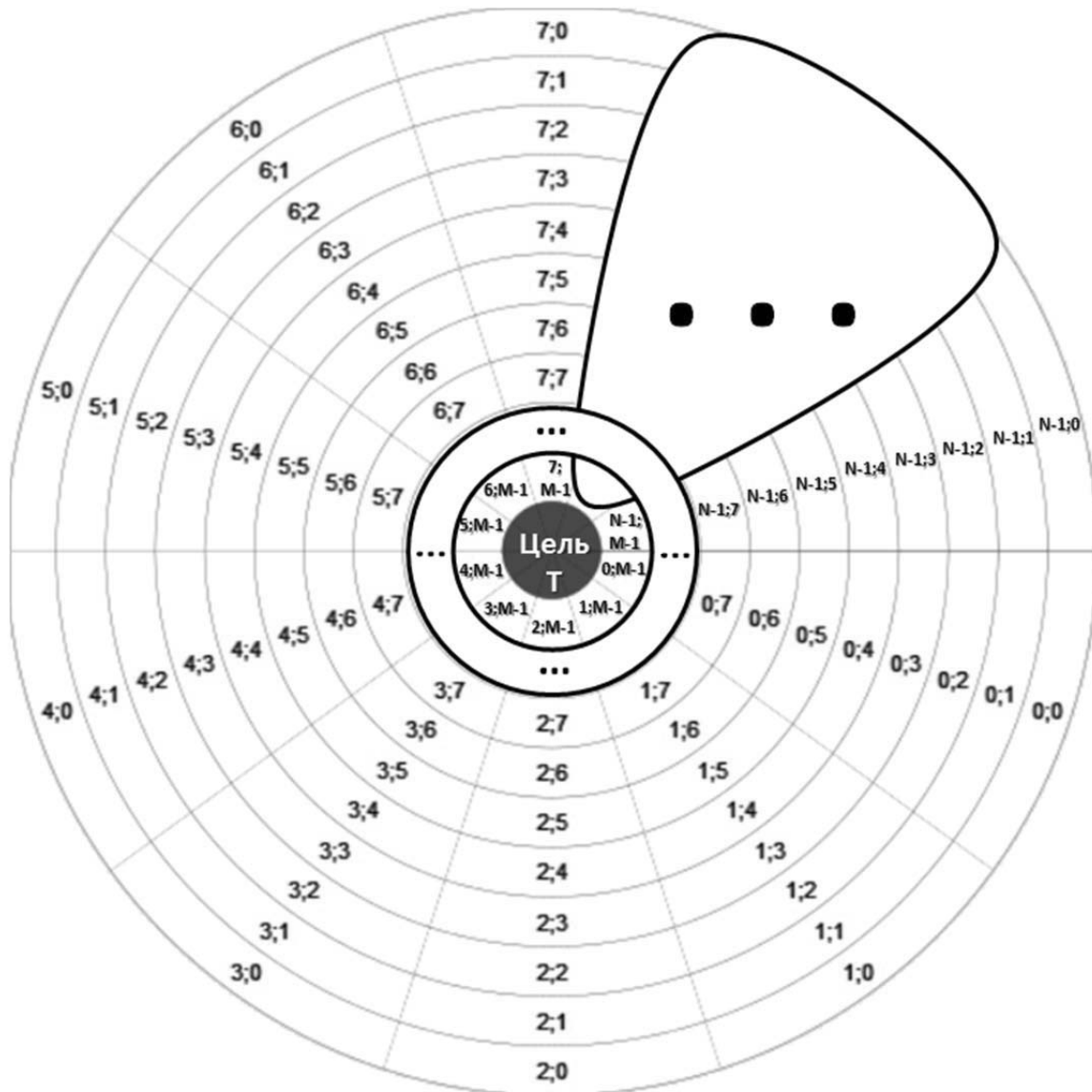


Рис.6.1. Структура игрового поля.

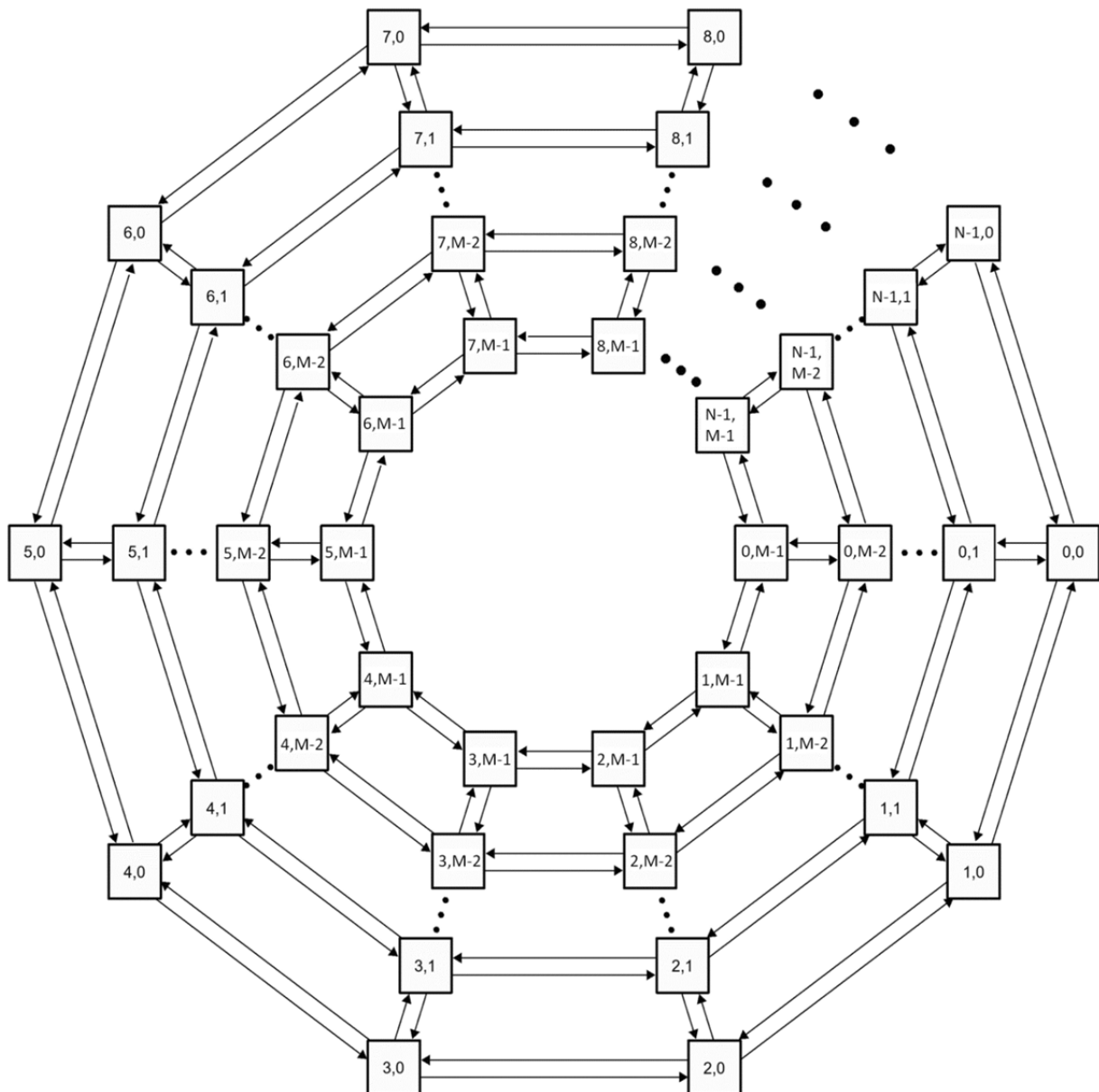


Рис.6.2. Структура связей между состояниями марковского случайного процесса, представляющего перемещение агентов по ячейкам игрового поля.

6.3. МОДЕЛЬ УПРАВЛЕНИЯ НА ОСНОВЕ МАРКОВСКОГО ПРОЦЕССА

Будем полагать, что перемещение каждого агента по ячейкам рассматриваемой области поверхности описывается *марковским случайным процессом с дискретными состояниями и непрерывным временем*. Пребывание в состоянии такого процесса соответствует пребыванию в ячейке указанной области поверхности, имеющей те же самые индексы, а переходы, для которых выполняются свойства пуассоновских потоков событий, возможны только между состояниями, соответствующими *смежным ячейкам*, имеющим общую границу, не совпадающую с точкой. Модель этого процесса может быть представлена ориентированным графом, представленным на рис. 6.2. Полагается, что для указанных процессов заданы

начальные распределения агентов по ячейкам, а интенсивности переходов между состояниями являются неизвестными (свободными) параметрами моделей.

Число переходов между смежными состояниями X , попадающих в любой временной интервал τ , начинающийся в момент t , распределено согласно закону Пуассона:

$$P_{t,\tau}(X = m) = \frac{a(t, \tau)^m}{m!} e^{-a(t, \tau)},$$

где $P_{t,\tau}(X = m)$ – вероятность появления m переходов в течение рассматриваемого интервала, $a(t, \tau)$ – среднее число переходов, попадающих в интервал τ , начинающийся в момент времени t . Далее рассматриваются только стационарные потоки переходов, в которых $a(t, \tau) = \eta\tau$, а $\eta = const$ есть интенсивность стационарного потока. Указанное выше предположение о пуассоновском распределении переходов между смежными состояниями обычно для прикладных задач, поскольку это распределение часто встречается на практике благодаря предельным теоремам для потоков событий [6].

Поведение каждого агента определяется автономно. Динамика изменения вероятностей пребывания k -го агента в состояниях марковских процессов определяется системой уравнений Колмогорова в матричной форме:

$$\frac{d\mathbf{p}_k(t)}{dt} = \mathbf{M}_k(\lambda_k)\mathbf{p}_k(t),$$

где $\mathbf{p}_k(t)$ представляет вероятности пребывания k -го агента в n состояниях процесса, λ_k – множество интенсивностей переходов между смежными состояниями для k -го агента, \mathbf{M}_k – имеющая порядок n матрица интенсивностей переходов между состояниями для k -го агента. Начальные условия: $p_{k,i_0j_0}(0) = 1, \{p_{k,ij}(0) = 0\}_{i \neq i_0, j \neq j_0}$, где (i_0, j_0) – индексы ячейки, в которой k -й агент находится при $t = 0$.

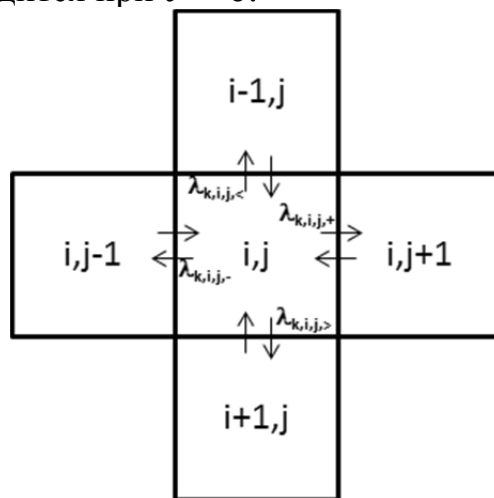


Рис. 6.3. Обозначения для интенсивностей переходов k -го агента из заданного состояния.

Далее используются следующие обозначения для элементов множества λ_k (рис. 6.3):

- интенсивности переходов k -го агента из состояния (i, j) вдоль i -го кольца состояний по часовой стрелке – $\lambda_{k,i,j,+}$;
- интенсивности переходов k -го агента из состояния (i, j) вдоль i -го кольца состояний против часовой стрелки – $\lambda_{k,i,j,-}$;
- интенсивности переходов k -го агента из состояния (i, j) вдоль j -го сектора состояний по направлению к центру игрового поля – $\lambda_{k,i,j,>}$;
- интенсивности переходов k -го агента из состояния (i, j) вдоль j -го сектора состояний по направлению от центра игрового поля – $\lambda_{k,i,j,<}$.

Расчёты вероятностей $\mathbf{p}_k(t)$ для всех агентов выполняются синхронно в дискретные моменты времени с шагом Δt . Допускается нахождение нескольких агентов в одной и той же ячейке.

Обозначив текущий момент игрового времени как t_* , введём для происходящих событий следующие обозначения:

- A – поражение цели в случае её атаки;
- B_k – поражение k -го агента целью в случае его атаки;
- D_k – атака цели k -м агентом;
- H_{ijk} – пребывание k -го агента в ячейке (i, j) ,
- \tilde{H}_{ijk} – пребывание k -го агента в момент времени $t_* + \Delta t$ в ячейке (i, j) , смежной по отношению к ячейке, в которой этот агент находился в момент времени t_* ,
- $E_{k,i} = H_{i0k} + \dots + H_{i,N-1,k}$ – пребывание k -го агента в i -м кольце,
- C_k – переход из ячейки, в которой k -й агент находился в момент времени t_* , в одну из смежных по отношению к ней ячеек.

Вероятность поражения цели в случае её атаки k -м агентом рассчитывается по формуле полной вероятности:

$$p(A|D_k) = \sum_{i,j} p(A|H_{ijk})p(H_{ijk})$$

Вероятность поражения цели k -м агентом при атаке из ячейки (i, j) задаётся «картой осуществимостей», представленной функцией f_a :

$$p(A|H_{ijk}) = f_a(i, j).$$

Вероятности $p(H_{ijk})$ определяются путём решения приведённой выше системы уравнений Колмогорова.

Вероятность поражения целью k -го агента во время пребывания в ячейке (i, j) задаётся «картой уязвимостей», представленной функцией f_b :

$$p(B|H_{ijk}) = f_b(i, j).$$

Найдём закон распределения времени $\tau_* > 0$, которое затрачивается на переход между состояниями процесса. Вероятность того, что переход не произойдёт, есть $P_\tau(X = 0) = e^{-\eta\tau}$. Эта величина равна вероятности того, что $\tau_* > \tau$: $P(\tau_* > \tau) = e^{-\eta\tau}$. Отсюда $P(\tau_* \leq \tau) = 1 - P(\tau_* > \tau) = 1 - e^{-\eta\tau}$, где $F(\tau, \eta) = P(\tau_* \leq \tau)$ есть функция распределения случайной величины τ_* .

Плотность распределения этой величины есть $\eta e^{-\eta t}$, а математическое ожидание равно $\int_0^{\infty} t \eta e^{-\eta t} dt = \frac{1}{\eta}$.

Перемещения между смежными ячейками выполняются со скоростью $\vec{v} = (v_\lambda, v_\mu)$, имеющей следующие компоненты:

$$v_\lambda = \Delta l_\lambda / \tau_{\lambda*}, v_\mu = \Delta l_\mu / \tau_{\mu*},$$

где Δl_λ и Δl_μ , соответственно, есть *расстояния между центрами смежных ячеек* в радиальном и трансверсальном направлении, а $\tau_{\lambda*}$ и $\tau_{\mu*}$ – времена, затрачиваемые на преодоление указанных расстояний. Эти перемещения определяют переходы между состояниями марковского процесса в соответствующих направлениях. В процессе игры времена $\tau_{\lambda*}$ и $\tau_{\mu*}$ генерируются как значения случайных величин, имеющих, в зависимости от выбранного направления, одну из следующих функций распределения: $F(\tau, \lambda_{k,i,j,+})$, $F(\tau, \lambda_{k,i,j,-})$, $F(\tau, \lambda_{k,i,j,>})$ или $F(\tau, \lambda_{k,i,j,<})$.

Вероятность поражения цели при групповой атаке определяется по формуле сложения вероятностей:

$$\begin{aligned} p(A|D_1 + \dots + A|D_n) \\ = p(A|D_1) + \dots + p(A|D_n) - p(A|D_1 \cdot A|D_2) - p(A|D_1 \cdot A|D_3) - \dots \\ + p(A|D_1 \cdot A|D_2 \cdot A|D_3) + \dots \pm p(A|D_1 \cdot A|D_2 \dots \cdot A|D_n). \end{aligned}$$

События $A|D_i$ и $A|D_j$ полагаются независимыми при $i \neq j$.

6.4. АЛГОРИТМ ПОВЕДЕНИЯ АГЕНТОВ СИСТЕМЫ

Поведение k -го агента системы ($k = 0, \dots, K - 1$) определяется следующим алгоритмом.

Шаг 1. Задать начальные условия задачи, которые определяются:

- распределением агентов по областям (i, j) игрового поля,
- «картой осуществимостей», представленной функцией $f_a(i, j)$,
- «картой уязвимостей», представленной функцией $f_b(i, j)$,
- приближённой оценкой интервала дискретизации Δt .
- Перейти к шагу 2.

Шаг 2. Для текущего расположения агентов в текущий момент времени t_* :

- определить не более B агентов, имеющих наибольшие вероятности поражения целью в соответствии с «картой уязвимостей» $f_b(i, j)$ и случайным образом, соразмерно этим вероятностям, удалить с игрового поля часть указанных агентов;
- проверить критерии индивидуальной ($p(A|D_k) \geq p_t$) или коллективной ($p(A|D_1 + \dots + D_n) \geq p_{tn}$) атаки цели агентами; если хотя бы один из них выполнен, то атаковать цель. Перейти к шагу 3.

Шаг 3. Если в момент времени t_* выполнено хотя бы одно из условий завершения игры, а именно:

- превышение заданного порога p_{tmax} расчётной вероятностью поражения цели в случае индивидуальной ($p(A|D_k) \geq p_{tmax}$) или коллективной ($p(A|D_1 + \dots + A|D_n) \geq p_{tmax}$) атаки,
- получение информации о поражении цели, либо
- поражение целью всех агентов, –
- то перейти к шагу 6, в противном случае – перейти к шагу 4.

Шаг 4. Выполнить идентификацию значений свободных параметров марковских процессов $\{\lambda_k\}_{k=0, \dots, K-1}$ при условии $|\vec{v}_k| \leq v_{max}$, где ограничение на скорость определяет границы компонентов множества $\{\lambda_k\}_{k=0, \dots, K-1}$ при средних значениях времён переходов $\bar{t}_{\lambda^*} = \frac{1}{\lambda^*}$ и $\bar{t}_{\mu^*} = \frac{1}{\mu^*}$. Если агенты имеют возможность получать релевантную информацию друг о друге, то максимизируемой целевой функцией игры, определяющей результаты этой идентификации, является вычисленная с учётом всех агентов групповая вероятность поражения цели $p(A|D_1 + \dots + A|D_n)$ в момент времени $t_* + \Delta t$, где Δt – интервал дискретизации, рассчитанный на шаге 5 предыдущего такта игры или полученный как начальное приближение на шаге 1, если шаг 5 ещё не выполнялся. В противном случае задача идентификации решается для каждого агента автономно, причём в качестве максимизируемых целевых функций игры используются индивидуальные вероятности поражения цели $p(A|D_k)$ ($k = 0, \dots, K - 1$) в тот же момент времени $t_* + \Delta t$. Перейти к шагу 5.

Шаг 5. Выбрать одну из ячеек игрового поля, смежных по отношению к ячейке, в которой находится k -й агент в момент времени t_* , используя «метод рулетки» [9] с вероятностями выбора объектов, пропорциональными прогнозируемым байесовским оценкам $p(\tilde{H}_{ijk} | C_k) = \frac{p(C_k | \tilde{H}_{ijk})p(\tilde{H}_{ijk})}{p(C_k)} = \frac{p(\tilde{H}_{ijk})}{p(C_k)}$, где вероятности $p(\tilde{H}_{ijk})$ рассчитываются для момента времени $t_* + \Delta t$ как результат выполнения предыдущего шага алгоритма, и переместить в неё этого агента со скоростью \vec{v}_k , случайные компоненты которой рассчитываются, используя идентифицированные на шаге 4 интенсивности переходов между состояниями, если выполнены следующие ограничения:

- (1) $|\vec{v}_k| \leq v_{max}$,
- (2) $p(B|H_{ij}) \leq p_B$.

Если не выполнено ограничение (1), то перемещение происходит со скоростью $|\vec{v}_k| = v_{max}$. Если не выполнено ограничение (2), то перемещение не происходит.

Интервал Δt определяется на данном такте игры как наибольшее время, необходимое для перемещения между центрами смежных ячеек:

$$\Delta t = \max_{k \in \{0, \dots, K-1\}} (\Delta l_k / |\vec{v}_k|), \text{ где } \Delta l_k = \sqrt{\Delta l_{\lambda, k}^2 + \Delta l_{\mu, k}^2}.$$

Переходы агентов между состояниями синхронизируются по единому для всех этих объектов интервалу Δt .

Перейти к следующему по порядку дискретному моменту времени $t_* + \Delta t$, рассматривая его далее как текущее время.

Перейти к шагу 2.

Шаг 6. Завершить игру.

Для решения задачи идентификации, представленной в описании данного алгоритма, авторами разработан численный метод [13, 15].

6.5. ПРОГРАММНОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ

Работа системы управления может быть проиллюстрирована с помощью специализированного программного обеспечения.

На рис. 6.4 и 6.5 представлены «карта осуществимостей» и «карта уязвимостей», представленные, соответственно, функциями $f_a(i, j)$ и $f_b(i, j)$. В начальный момент времени на игровом поле располагались 10 агентов системы, распределение которых по ячейкам задано на рис. 6.4 и 6.5. Вычисленное поведение многоагентной системы, показанное в виде распределений агентов по игровому полю с временным шагом 0,1 с на рис. 6.6-8, определялось следующими параметрами: $p_t = 0,8$; $p_{tn} = 0,95$; $p_{tmax} = 0,95$; $p_B = 0,7$. Перемещения агентов по игровому полю и осуществлённые ими атаки цели привели к её поражению на 1 с игры.

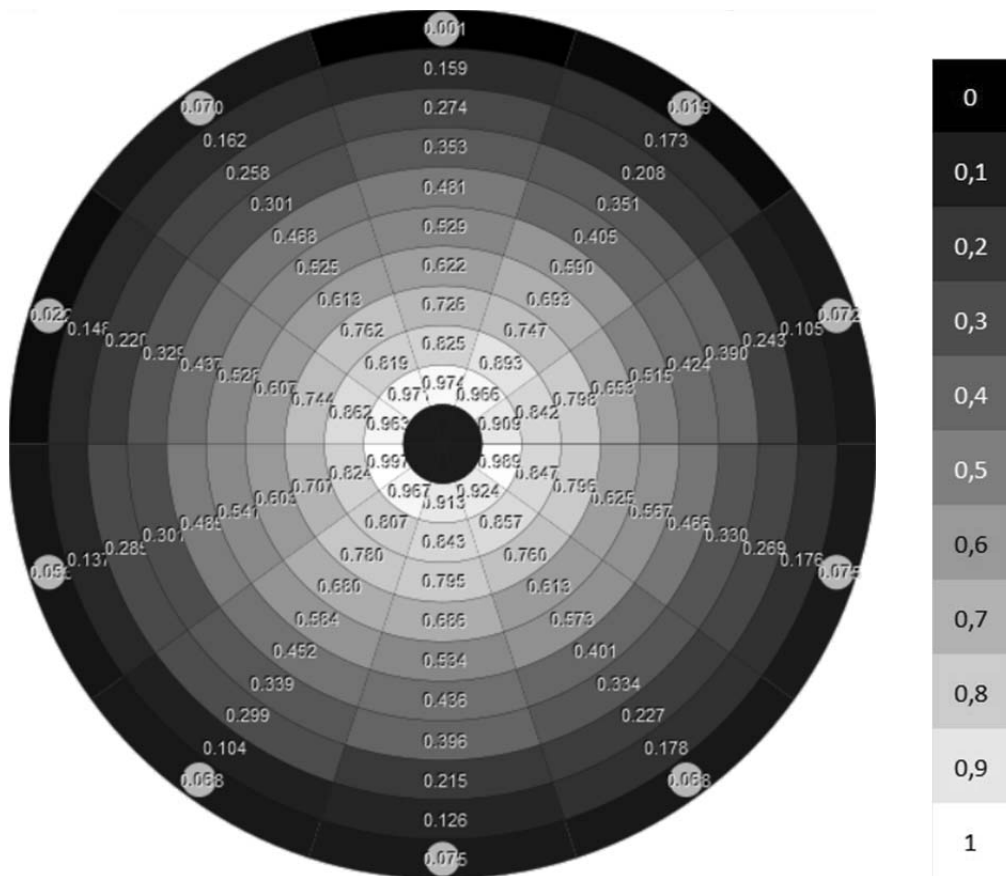


Рис. 6.4. «Карта осуществимостей» и начальное расположение агентов.

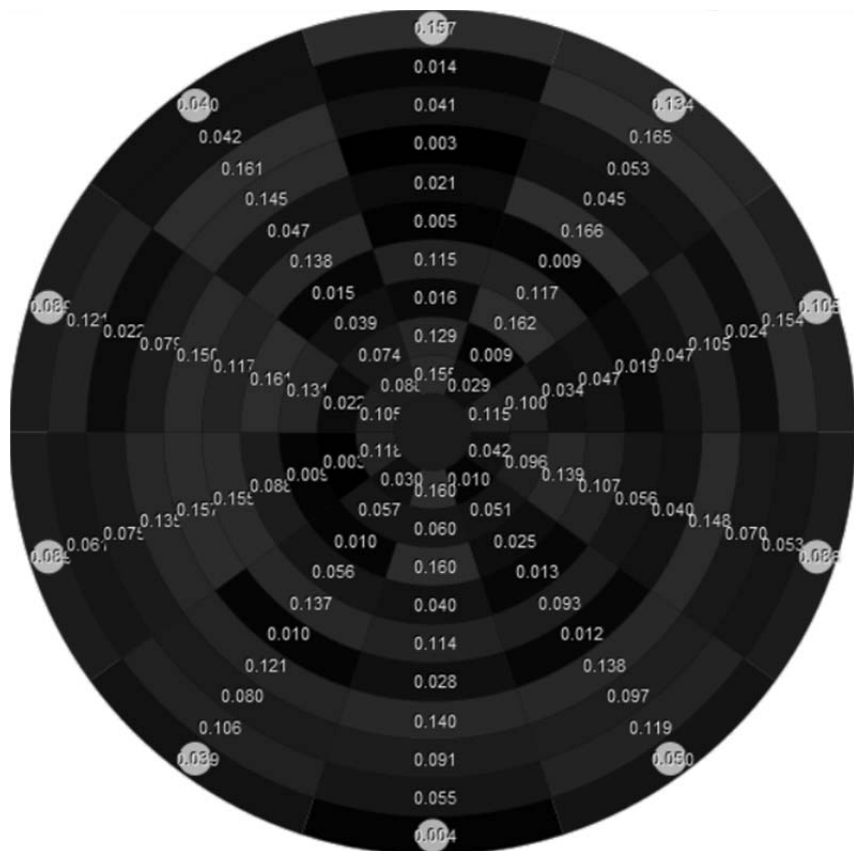


Рис. 6.5. «Карта уязвимостей» и начальное расположение агентов.

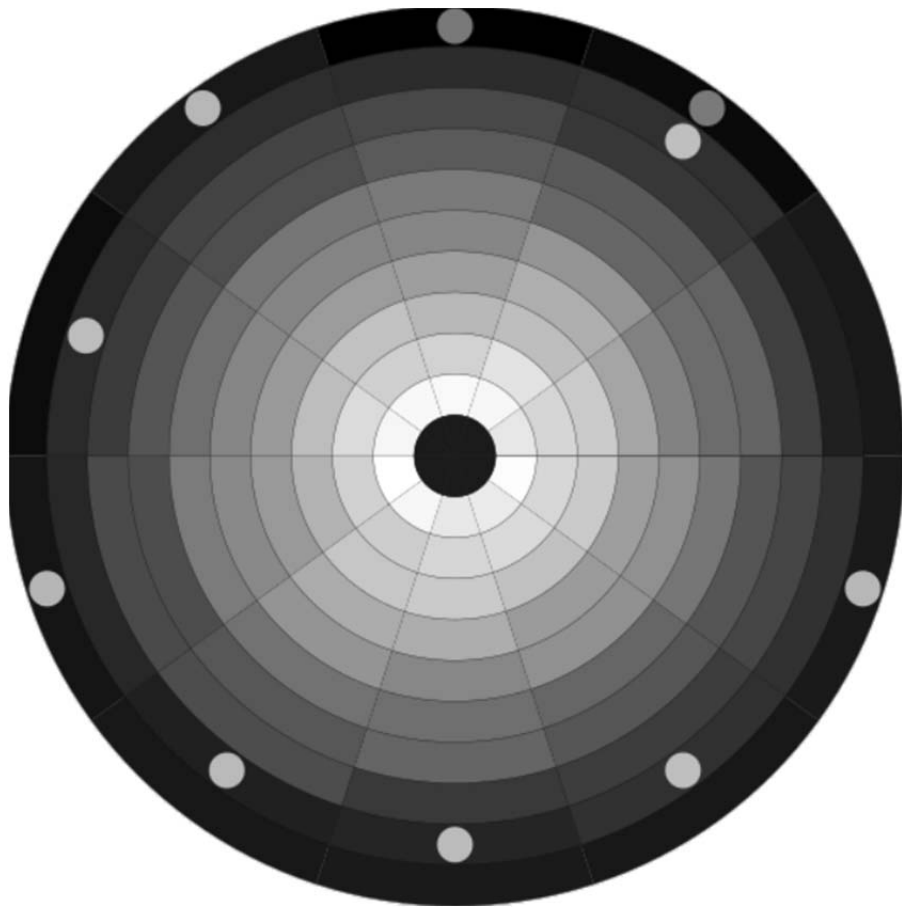


Рис. 6.6. Первый такт игры: 2 агента на «севере» карты, отмеченные более темным цветом, поражены целью T .

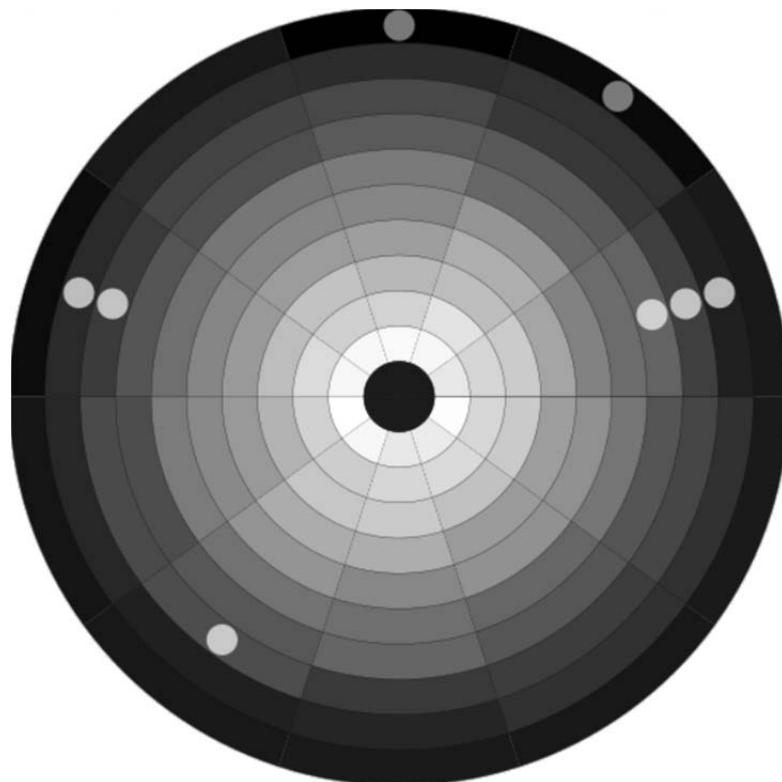


Рис. 6.7. Пятый такт игры: агенты группируются в ячейках, где выше вероятность попадания в цель T .

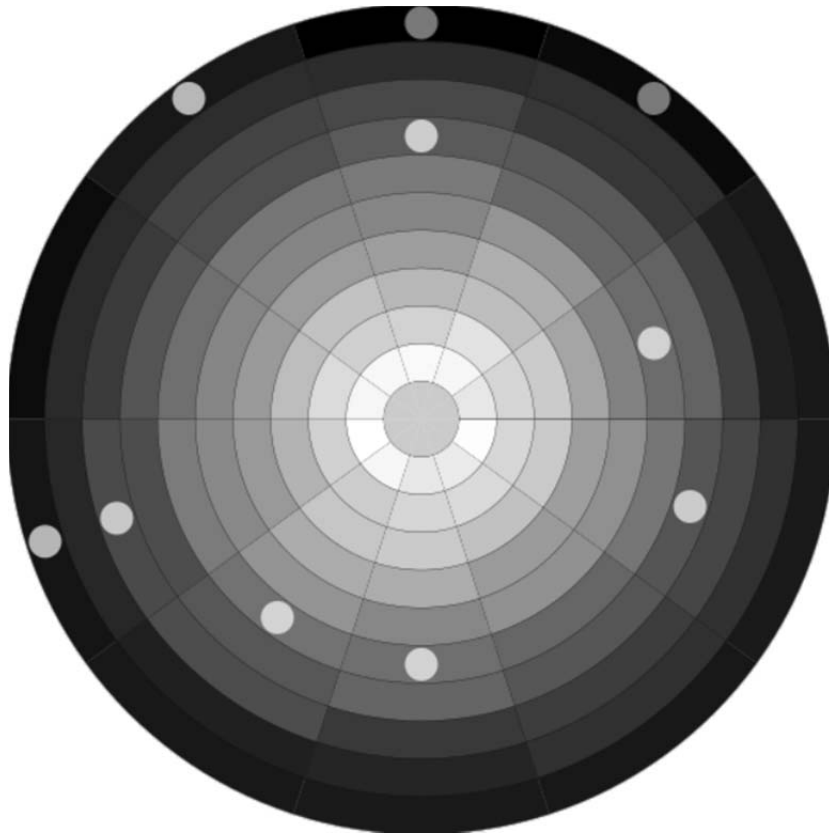


Рис.6.8. Десятый такт игры: агенты поражают цель T , выполнив коллективную атаку.

6.6. ПРОГНОЗИРОВАНИЕ СОСТОЯНИЙ СИСТЕМЫ

Для прогноза состояния системы в случае простых вариантов развития игры, получим аналитические выражения для вероятностей поражения цели в случае её атаки k -м агентом и поражения k -го агента в случае его атаки целью.

Назовём поведение k -го агента *простейшим*, если

- он перемещается к цели, сохраняя постоянную ненулевую интенсивность переходов между смежными кольцами в направлении цели и нулевую интенсивность переходов между смежными кольцами в противоположном направлении,
- вероятность поражения цели агентом из i -го кольца есть $p(A|E_{k,i}) = if_{a*}$, где $f_{a*} = const$,
- вероятность поражения целью агента из i -го кольца есть $p(B_k|E_{k,i}) = if_{b*}$, где $f_{b*} = const$.

Объединим все ячейки каждого кольца игрового поля в укрупнённые состояния и рассмотрим марковский процесс с постоянной интенсивностью переходов, представляющий случайные переходы от одного кольца к другому в случае простейшего поведения (рис. 6.9). В этом случае интенсивность переходов между смежными кольцами равна сумме интенсивностей переходов между соответствующими парами состояний по

секторам (в рассматриваемом случае эти интенсивности не зависят от номеров колец):

$$\lambda_k = \lambda_{k,i} = \sum_{j=0}^{N-1} \lambda_{k,i,j}, i = 0, \dots, M-2.$$

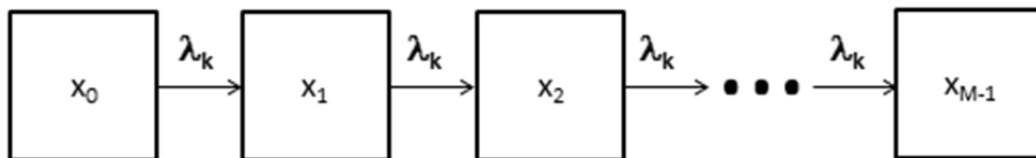


Рис. 6.9. Марковский процесс с постоянной интенсивностью переходов, представляющий случайные переходы k -го агента от одного кольца к другому в случае простейшего поведения. Состояние x_i ($i = 0, \dots, M-1$) соответствует пребыванию в i -м кольце игрового поля, λ_k – интенсивность перехода между состояниями

В случае указанного процесса с постоянной интенсивностью λ_k вероятность попадания в i -е состояние в течение временного интервала τ есть вероятность совершения i переходов между состояниями за указанное время:

$$p_\tau(E_{k,i}) = P_{0,\tau}(X = i) = \frac{(\lambda_k \tau)^i}{i!} e^{-\lambda_k \tau}.$$

Множество $\{E_{k,i}\}_{i=0,\dots,M-1}$ есть полная группа несовместных событий для k -го агента. Вероятность поражения цели этим агентом в течение временного интервала τ определяется по формуле полной вероятности:

$$p_\tau(A) = \sum_{i=0}^{M-1} p(A|E_{k,i})p_\tau(E_{k,i}).$$

Последнее выражение может быть преобразовано следующим образом:

$$p(A) = \sum_{i=0}^{M-1} i f_{a^*} p_\tau(E_{k,i}) = \sum_{i=0}^{M-1} i f_{a^*} \frac{(\lambda_k \tau)^i}{i!} e^{-\lambda_k \tau} = f_{a^*} \sum_{i=0}^{M-1} \frac{i(\lambda_k \tau)^i}{i!} e^{-\lambda_k \tau} = f_{a^*} R(\lambda_k \tau, M),$$

где

$$R(\lambda_k \tau, M) = \sum_{i=0}^{M-1} \frac{i(\lambda_k \tau)^i}{i!} e^{-\lambda_k \tau}.$$

Рассуждая подобным образом, выразим вероятность поражения целью k -го агента в течение временного интервала τ .

$$p_\tau(B_k) = f_{b^*} R(\lambda_k \tau, M).$$

Полагая события A и B_k независимыми, получим следующие выражения для событий, имеющих место в течение временного интервала τ :

$$p_\tau(A|\bar{B}_k) = p(A)p(\bar{B}_k) = f_{a^*} R(\lambda_k \tau, M)(1 - f_{b^*} R(\lambda_k \tau, M)),$$

$$p_\tau(B_k|\bar{A}) = p(B_k)p(\bar{A}) = f_{b^*} R(\lambda_k \tau, M)(1 - f_{a^*} R(\lambda_k \tau, M)),$$

Таким образом, доказаны следующие утверждения.

Утверждение 1. Вероятность поражения цели k -м агентом в течение временного интервала τ в случае его простейшего поведения и сохранения непоражённым есть $f_{a^*} R(\lambda_k \tau, M)(1 - f_{b^*} R(\lambda_k \tau, M))$.

Утверждение 2. Вероятность поражения целью k -го агента в течение временного интервала τ в случае его простейшего поведения и сохранения цели непоражённой есть $f_{b^*}R(\lambda_k\tau, M)(1 - f_{a^*}R(\lambda_k\tau, M))$.

Графики функций $p_\tau(A|\bar{B}_k)$ и $p_\tau(B_k|\bar{A})$ при различных значениях M , $f_{a^*} = 0,5$ и $f_{b^*} = 0,2$ представлены на рис. 6.10 (а,б).

Очевидно, что в общем случае, когда поведение агентов простейшим не является, задача поддаётся решению только с помощью численных методов.

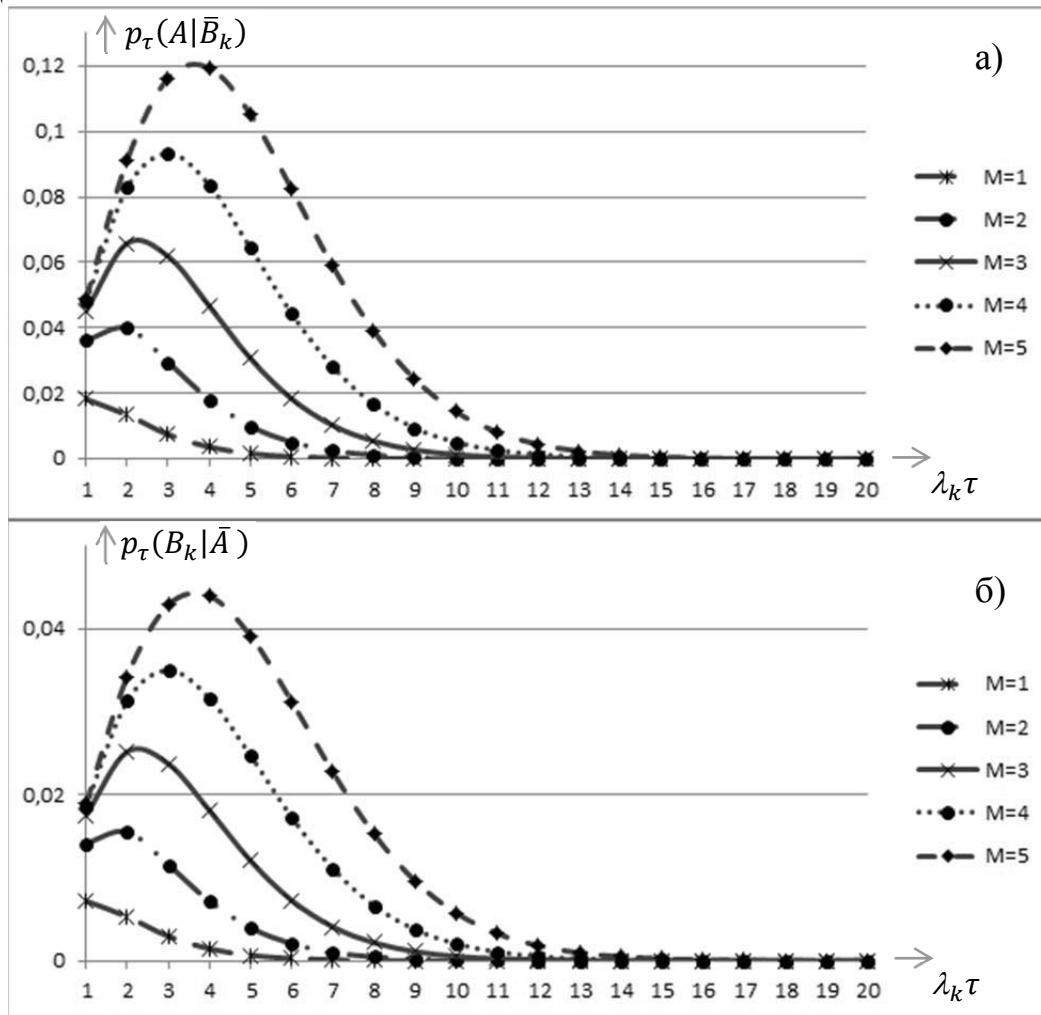


Рис. 6.10. $p_\tau(A|\bar{B}_k)$ и $p_\tau(B_k|\bar{A})$, представленные, соответственно, на графиках а) и б), как функции $\lambda_k\tau$ при различных значениях M ; $f_{a^*} = 0,5$ и $f_{b^*} = 0,2$, соответственно.

6.7 ЗАКЛЮЧЕНИЕ

1. Разработана и программно реализована вероятностная модель поведения прикладной многоагентной системы, представляющей игровое взаимодействие множества агентов и цели. Поведение агентов является недетерминированным и, поэтому, непредсказуемым с точки зрения цели. Система допускает как согласованное, так и автономное поведение агентов, в зависимости от того, получают или нет агенты информацию о наличии и положении других работоспособных агентов.

2. Поведение агента определяется алгоритмом, который предусматривает
 - идентификацию параметров вероятностной модели с использованием оптимизируемых целевых функций, выражающих групповую и индивидуальные вероятности поражения цели,
 - последующее перемещение агентов по игровому полю со скоростями, случайные компоненты которых рассчитываются с использованием идентифицированных значений параметров модели,
 - атаку цели в случае превышения пороговых вероятностей её индивидуального или группового поражения.
3. Результаты игры определяются:
 - степенью детализации при разбиении игрового поля на ячейки;
 - начальным распределением агентов по областям игрового поля;
 - «картой осуществимостей», представляющей распределение по игровому полю вероятностей поражения цели агентами;
 - «картой уязвимостей», представляющей распределение по игровому полю вероятностей поражения агентов целью;
 - числом агентов, одновременно атакуемых целью;
 - результатами генерации случайных компонентов скоростей перемещений агентов между ячейками игрового поля.
4. Получены аналитические выражения для вероятностей поражения цели при её атаке агентом и поражения агента при его атаке целью в случае простейшего поведения агента.
5. Разработанная модель и алгоритм позволяют обеспечивать управление поведением релевантных прикладных многоагентных систем.

ЛИТЕРАТУРА К РАЗДЕЛУ 6

1. Городецкий В.И., Карсаев О.В., Самойлов В.В., Серебряков С.В. Прикладные многоагентные системы группового управления. – Искусственный интеллект и принятие решений, №2, 2009, с. 3–24.
2. Куравский Л.С., Мармалюк П.А., Алхимов В.И., Юрьев Г.А. Математические основы нового подхода к построению процедур тестирования. – Экспериментальная психология, т.5, №4, 2012, с. 75-98.
3. Куравский Л.С., Попков С.И. Вероятностная модель поведения прикладной многоагентной системы. – Нейрокомпьютеры: разработка и применение, 2016, №9, с. 22–34.
4. Куравский Л.С., Юрьев Г.А. Адаптивное тестирование как марковский процесс: модели и их идентификация. - Нейрокомпьютеры: разработка и применение, №2, 2011, с. 21-29.
5. Марковские модели в задачах диагностики и прогнозирования: Учеб. пособие. / Под ред. Л.С. Куравского. – М.: РУСАВИА, 2013. – 172 с.

6. Овчаров Л. А. Прикладные задачи теории массового обслуживания. – М.: Машиностроение, 1969. – 324 с.
7. Осипов Г.С. Динамические интеллектуальные системы. – Искусственный интеллект и принятие решений, № 1, 2008, с. 47–54.
8. Осипов Г.С. Методы искусственного интеллекта. – М.: Физматлит, 2011. – 296 с.
9. Рутковская Д., Пилиньский М., Рутковский Л. Нейронные сети, генетические алгоритмы и нечёткие системы. – М.: Горячая линия-Телеком, 2013. – 384 с.
10. Фон Нейман Дж. Теория самовоспроизводящихся автоматов. – М.: URSS, 2010. – 384 с.
11. Цетлин М.Л. Исследования по теории автоматов и моделированию биологических систем. – М: Наука, 1969. – 316 с.
12. Kuravsky L.S., Marmalyuk P.A., Baranov S.N., Alkhimov V.I., Yuryev G.A. and Artyukhina S.V. A New Technique for Testing Professional Skills and Competencies and Examples of its Practical Applications. – Applied Mathematical Sciences, Vol. 9, 2015, no. 21, 1003–1026, <http://dx.doi.org/10.12988/ams.2015.411899>.
13. Kuravsky L.S., Marmalyuk P.A., Yuryev G.A. and Dumin P.N. A Numerical Technique for the Identification of Discrete-State Continuous-Time Markov Models. – Applied Mathematical Sciences, Vol. 9, 2015, no. 8, 379–391, <http://dx.doi.org/10.12988/ams.2015.410882>.
14. Kuravsky L.S., Marmalyuk P.A., Yuryev G.A., Belyaeva O.B. and Prokopieva O.Yu. Mathematical Foundations of Flight Crew Diagnostics Based on Videoculography Data. – Applied Mathematical Sciences, Vol. 10, 2016, no. 30, 1449–1466, <http://dx.doi.org/10.12988/ams.2016.6122>.
15. L.S. Kuravsky, S.I. Popkov and S.L. Artemenkov. An applied multi-agent system within the framework of a player-centered probabilistic computer game. - International Journal of Modeling, Simulation, and Scientific Computing, Vol. 8, 2017, no. 2, DOI: 10.1142/S1793962317500635.

**С.Л. Артеменков, В.И. Алхимов, С.Н. Баранов, Беляева О.Б., П.Н. Думин,
П.А. Корниенко, Л.С. Куравский, С.Б. Малых, А.А. Марголис, П.А.
Мармалюк, А.С. Панфилова, С.И. Попков, Г.А. Юрьев, Н.Е. Юрьева**

Марковские модели в задачах диагностики и прогнозирования.

Учеб. пособие. / Под ред. Л.С. Куравского. – 2-е изд., доп.

Дизайн обложки – Е.А. Карпенко, М.Ю. Степаненкова

Подписано в печать: 11.09.2017
Формат: 60*90¹/₁₆. Бумага офсетная.
Гарнитура Times. Печать цифровая.
Усл. печ. п. 8,9 Усл.-изд. л. 12,6
Тираж 500 экз.

Отпечатано в Управлении информационными и
издательскими проектами МГППУ